Die Gruppe der Elementargeometrie als automorphe Kollineationsgruppe des absoluten Kegelschnittes

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der hohen philosophischen Fakultät der
Universität Basel

von

MAX HARTMANN
aus Basel

BASEL 1923

Die Gruppe der Elementargeometrie als automorphe Kollineationsgruppe des absoluten Kegelschnittes

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der hohen philosophischen Fakultät der

Universität Basel

von

MAX HARTMANN
aus Basel

BASEL 1923

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. *H. Mohrmann* und Dr. *O. Spieß.*

BASEL, den 5. März 1923.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Prof. Dr. **A. Buxtorf,**
Dekan.

MEINEN LIEBEN ELTERN
GEWIDMET

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548816_0136

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 7

I. Kapitel. **Die Elementargeometrie und der absolute Kegelschnitt.**

§ 1. Das Wesen der Elementargeometrie 10

§ 2. Das Verhältnis der Elementargeometrie zur projektiven Geometrie 11

§ 3. Die Einordnung der metrischen Geometrie in die projektive Geometrie mittels des absoluten Kegelschnittes 12

II. Kapitel. **Die automorphe Kollineationsgruppe G_7 des Kreiszylinders.**

§ 1. Der Kreiszylinder und seine Parameterdarstellung 19

§ 2. Die projektiven Transformationen, die den Zylinder in sich überführen und ihre endlichen Gleichungen 22

§ 3. Die G_7 als gemischte Gruppe und die geometrische Deutung der charakteristischen Eigenschaften der reellen Scharen 24

§ 4. Die Zusammensetzung der G_7 29

§ 5. Die geometrische Deutung der charakteristischen Eigenschaften der invarianten Untergruppen der G_7 32

§ 6. Der Zylinder zweiter Art und die reellen Scharen seiner G_7 40

III. Kapitel. **Die automorphe Kollineationsgruppe des absoluten Kegelschnittes in Beziehung zur Elementargeometrie.**

§ 1. Der absolute Kegelschnitt als reell-duales Gebilde zum Zylinder zweiter Art und seine automorphe Kollineationsgruppe 44

§ 2. Der Übergang von Ebenenkoordinaten zu Punktkoordinaten 47

§ 3. Die Gruppe der Elementargeometrie 50

EINLEITUNG

Felix Klein kommt das große Verdienst zu, in seinen „vergleichenden Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“ [1]) die Bedeutung der Gruppe als zusammenfassendes und ordnendes Prinzip der Geometrie erkannt zu haben [2]). Er hat in seinem Programm nicht nur die Mittel geliefert, alle möglichen Geometrien systematisch aufzustellen und ihre unterscheidenden Merkmale anzugeben, sondern auch das Gemeinsame der verschiedenen Arten von Geometrien klar hervorgehoben.

Zu Beginn der siebziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts standen sich die verschiedenen Richtungen der Geometrie fast völlig zusammenhangslos gegenüber; man vergegenwärtige sich nur den Entwicklungsgang jeder dieser einzelnen Geometrien. Die Pflege der reinen Geometrie setzte ein mit Beginn des 19. Jahrhunderts durch *Monge* und *Poncelet* in Frankreich und etwas später in Deutschland durch *Möbius, Plücker, Steiner, v. Staudt* und andere, die als Schöpfer der projektiven Geometrie, der Linien-, Kreis- und Kugelgeometrie anzusehen sind. Völlig unabhängig von dieser Richtung begründete *Gauß* die eigentliche Flächentheorie, während ungefähr gleichzeitig *Lobatschewskij* und *Bolyai* die erste der nichteuklidischen Geometrien entdeckten. Es entstand ferner durch die Arbeiten von *Listing* und *Möbius* jener Teil der Geometrie, der den Zusammenhang der geometrischen Gebilde unabhängig von ihrer Gestalt studiert, die Analysis situs. Die Entwicklung der neueren analytischen Geometrie unter Benützung der algebraischen Methoden der Invariantentheorie, wovon nur die Arbeiten *Cayleys* und *Clebschs* erwähnt seien, liegt noch in der Zeit vor

[1]) Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät der Universität Erlangen, 1872; wieder abgedruckt in den Math. Annalen Bd. 43, 1893 und in F. Klein, Gesammelte Mathem. Abhandlungen, Bd. I, 1921.

[2]) Caratheodory, C. Die Bedeutung des Erlanger Programms, Wochenschrift „Die Naturwissenschaften“, Heft 17, 1919.

1872, wie übrigens auch die ersten Ansätze zur Begründung der Geometrie der mehrdimensionalen Räume durch *Graßmann*.

Mit dem Anwachsen des Stoffes und der hierdurch bedingten Differenzierung wuchsen auch die trennenden Schranken zwischen den Spezialgebieten, bis *Klein* durch sein Programm ihre Wechselbeziehungen aufdeckte und der zunehmenden Zersplitterung Einhalt gebot. Er lehrte uns insbesondere die Elementargeometrie als die Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen aufzufassen, und diese ihrerseits als Untergruppe der Gruppe aller Kollineationen, als die sie in der vorliegenden Arbeit betrachtet werden soll. Nun sind zwar sowohl die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen, als auch ihre Untergruppe, die Gruppe der Bewegungen, oft studiert. Es sei nur an die Arbeiten von *Joh. Bernoulli*[3]) und *Euler*[4]) erinnert, besonders aber an diejenigen von *Jordan*[5]), *Study*[6]) und *Lie*[7]). *Jordan* hat schon 1869 als erster alle kontinuierlichen und diskontinuierlichen Gruppen angegeben, die sich aus den reellen Bewegungen des Raumes bilden lassen, und *Study* hat die kontinuierlichen Gruppen übersichtlich zusammengestellt und geometrisch charakterisiert.

Doch ist die Gruppe der Elementargeometrie bisher nie als Untergruppe der allgemeinen Kollineationsgruppe behandelt worden, d. h. als automorphe, projektive Gruppe desjenigen Gebildes im Raume, das, unwandelbar gegenüber allen Transformationen der Elementargeometrie, von *Cayley*[8]) als absoluter Kegelschnitt bezeichnet worden ist. Diese Lücke auszufüllen ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, und zwar soll zunächst die automorphe Kollineationsgruppe des Kegels zweiter Ordnung, oder wenn wir sogleich metrisch spezialisieren, die automorphe Kol-

[3]) Bernoulli, Joh., Verschiedene Arbeiten, meist im 4. Band der Opera omnia.

[4]) Euler, Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, Petersburg, Novi Comm. 20, 1776.

[5]) Jordan, Mémoire sur les groupes de mouvements, annali di matematica, Ser. 2, Bd. 2, 1869.

[6]) Study, Von den Bewegungen und Umlegungen, Mathem. Annalen, Bd. 39, 1891, und Über Bewegungsinvarianten und Elementargeometrie, Leipziger Berichte, Bd. 48, 1896.

[7]) Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, 1893, S. 210.

[8]) „A Sixth Memoir upon Quantics", abgedruckt in Cayleys Collected Mathematical Papers, Vol. II, S. 561 ff. oder Philosophical Transactions T. 149, 1859, S. 61—90.

lineationsgruppe des Kreiszylinders dargestellt werden, die mit der Gruppe des absoluten Kegelschnittes holoedrisch isomorph ist, so daß sich die Resultate, die aus dem Studium der Gruppe des Zylinders gewonnen werden, ohne Mühe auf die Gruppe der Elementargeometrie übertragen lassen.

Damit ist auch der Gang der Untersuchung vorgezeichnet: Im ersten Kapitel soll das Verhältnis der Gruppe der Elementargeometrie zur Gruppe der projektiven Geometrie, d. h. die Auszeichnung des absoluten Kegelschnittes, zur Sprache kommen; das zweite Kapitel wird der Untersuchung der Gruppe des Zylinders gewidmet sein, und im dritten Kapitel endlich soll der Übergang von der Gruppe des letzteren zur Gruppe der Elementargeometrie vollzogen werden.

ERSTES KAPITEL

Die Elementargeometrie und der absolute Kegelschnitt.

§ 1. Das Wesen der Elementargeometrie[9]).

Die Elementarmathematik betrachtet diejenigen Eigenschaften ebener und räumlicher Gebilde, welche durch alle Bewegungen des Raumes, durch seine Ähnlichkeitstransformationen und durch Spiegelung, sowie durch die daraus zusammengesetzten Transformationen unverändert bleiben. Der Inbegriff dieser Transformationen bildet eine Gruppe, deren Gliederzahl sich leicht ermitteln läßt: Das Resultat jeder Bewegung im Raum ist eine Schraubung um eine Axe; da es ∞^4 solcher Axen gibt (Anzahl der Geraden im Raum), und für Drehwinkel und Ganghöhe je ein weiterer Parameter dazukommt, so ist die Gruppe der Bewegung sechsgliedrig. Nehmen wir schließlich noch die Ähnlichkeitstransformationen hinzu, das sind Streckungen von einem Punkte aus, so erhalten wir eine siebengliedrige Gruppe, die sogenannte *Hauptgruppe* G_7. Mit *Klein*[10]) können wir so die Elementargeometrie folgendermaßen definieren[11]): „Die Elementargeometrie ist die Invariantentheorie der Hauptgruppe", und „Geometrische Eigenschaften werden durch die Transformationen der Hauptgruppe nicht geändert" und umgekehrt: „Geometrische Eigenschaften sind durch ihre Unveränderlichkeit gegenüber den Transformationen der Hauptgruppe charakterisiert".

---

[9]) Sommer. Elementargeometrie vom Standpunkt der neueren Analysis aus. Encykl. der mathem. Wissenschaften III A. B. 8.

[10]) Klein, l. c.[1]) und Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil II, Vorlesung gehalten im Sommersemester 1908.

[11]) Man vergl. auch: Fano, Kontinuierliche Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip. Enc. d. math. Wiss. III A. B. 4b.

§ 2. Das Verhältnis der Elementargeometrie zur projektiven Geometrie.

Der projektiven Geometrie liegt die umfassendere Gruppe G_{15} der projektiven Transformation zu Grunde, auch als Gruppe der kollinearen Umformungen bezeichnet. Die Transformationen dieser erweiterten Gruppe sind dadurch charakterisiert, daß jedes Element in ein gleichartiges übergeht, Punkte in Punkt, Ebenen in Ebenen, und dabei jede Inzidenz (Ineinanderlage) erhalten bleibt. Da nun auch die Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen diese Eigenschaft besitzen, so ist die Gruppe der Elementargeometrie eine Untergruppe der projektiven Gruppe. Daraus schließen wir auf das gegenseitige Verhältnis der beiden Bereiche geometrischer Eigenschaften: Jede Beziehung, die gegenüber den Transformationen der projektievten Gruppe invariant bleibt, ändert sich erst recht nicht bei den Transformationen der Hauptgruppe, aber nicht umgekehrt. Bei dieser vorläufigen Auffassung erscheint die projektive Geometrie als ärmerer Ausschnitt der elementaren, es wird aber weiter unten gezeigt werden, daß es trotzdem möglich ist, die Elementargeometrie der projektiven einzuordnen.

Man bezeichnet nach *Heffter*[12]) die Elementargeometrie auch kurz als äquiforme Geometrie und versteht also darunter die Invariantentheorie der Hauptgruppe. In ihr steckt die sechsgliedrige Gruppe der Bewegungen, die kongruente Figuren in ebensolche überführt; man nennt die Geometrie dieser Gruppe metrische Geometrie; metrische Eigenschaften sind demnach solche, die durch die Transformationen der Bewegungsgruppe nicht geändert werden. Wenn wir zu den Bewegungen noch die Operation der Maßstabänderung hinzunehmen, wobei die Kongruenz verloren geht, wohl aber die eigentliche Gestalt entsprechender Figuren erhalten bleibt, so ergeben sich wieder die oben erwähnten Ähnlichkeitstransformationen, d. h. die Transformationen der Hauptgruppe.

Zwischen der projektiven und der äquiformen Geometrie liegt als weitere Abstufung die affine Geometrie, die hier bloß der Vollständigkeit wegen erwähnt werden soll. Im Gegensatz zur projektiven Geometrie, die keine

[12]) Heffter, Über das Lehrgebäude der Geometrie, insbesondere bei analytischer Behandlung. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Bd. XII, 1903, S. 490 ff.

Ferner: Heffter und Köhler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. I, 1905, Einleitung.

ausgezeichneten Elemente kennt, da jedes Element in ein beliebiges anderes übergeführt werden kann, sind in der affinen Geometrie die unendlichfernen Elemente ausgezeichnet, in dem Sinn, daß durch jede affine Transformation die unendlichferne Ebene in sich transformiert wird. Zur Inzidenz tritt somit in der affinen Geometrie noch die weitere Beziehung der Parallelität hinzu. Die G_{12} der affinen Transformationen ist als Untergruppe in der G_{15} enthalten, woraus sich entsprechend wie oben ergibt, daß jede Invariante der projektiven Geometrie zugleich eine solche der affinen Geometrie ist, nicht aber umgekehrt.

Um von dieser letztern Geometrie zur Elementargeometrie überzugehen, fügen wir als dritte Beziehung die der Orthogonalität hinzu. Als elementargeometrische Eigenschaften sind danach solche anzusehen, die sich zurückführen lassen auf die drei elementaren Beziehungen der Inzidenz, der Parallelität und der Orthogonalität.

§ 3. Die Einordnung der metrischen Geometrie in die projektive Geometrie mittels des absoluten Kegelschnittes.

Die Einordnung der metrischen Geometrie in die projektive Geometrie gelingt auf Grund des folgenden Satzes, der von *Klein* selbst als Mittelpunkt aller Überlegungen seines Programmes bezeichnet wurde[13]):

> „Ersetzt man die Hauptgruppe durch eine umfassendere Gruppe, so bleibt nur ein Teil der geometrischen Eigenschaften erhalten. Die übrigen erscheinen nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Eigenschaften des Systems, welches hervorgeht, wenn man denselben ein ausgezeichnetes Gebilde hinzufügt. Dieses ausgezeichnete Gebilde ist (soweit es überhaupt ein bestimmtes ist) dadurch definiert, daß es, fest gedacht, dem Raume unter den Transformationen der gegebenen Gruppe nur noch die Transformationen der Hauptgruppe gestattet."

In Bezug auf die affine Geometrie, um das Einfachere vorweg zu nehmen, ist dieses ausgezeichnete Gebilde, das gestattet affine Eigenschaften als projektive aufzufassen, die unendlichferne Ebene. Die Aussage, zwei Geraden sind parallel, hat vom Standpunkt der projektiven Geometrie aus zunächst keinen Sinn; fügen wir aber den beiden Geraden die unendlichferne Ebene hinzu, so

[13]) Klein, Gesammelte mathem. Abhandlungen, Bd. I, 1921, S. 465, Fußnote 14.

können wir rein projektiv sagen: Die beiden Geraden schneiden sich in einer gegebenen Ebene[14]).

Für die äquiforme Geometrie mit ihren nur ∞^7 Transformationen geht nicht bloß die unendlichferne Ebene in sich über, es bleibt in ihr auch ein Gebilde zweiten Grades fest, der von *Cayley*[15]) sogenannte absolute Kegelschnitt („the absolute"), über den noch ausführlicher gesprochen wird. Er besitzt die Eigenschaft, nur bei denjenigen projektiven Transformationen fest zu bleiben, die auch der Hauptgruppe angehören, so daß elementargeometrische Eigenschaften eines Gebildes nichts anderes sind als projektive Eigenschaften dieses, noch durch Hinzunahme des absoluten Kegelschnittes erweiterten Gebildes.

Der absolute Kegelschnitt oder imaginäre Kugelkreis ist dasjenige Gebilde, das alle Kugeln mit der unendlichfernen Ebene gemeinsam haben, oder auch der Berührungsschnitt beliebiger konzentrischer Kugeln. Die erste Aussage liefert uns sofort seine Gleichung in Punktkoordinaten:

Die Gleichung einer Kugel mit dem Radius r und den Mittelpunktskoordinaten a, b, c, bezogen auf ein rechtwinklig cartesisches Koordinatensystem, lautet:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

An Stelle der gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten x, y, z führen wir homogene Koordinaten ein, indem wir setzen:

$$x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0},\ z = \frac{x_3}{x_0} \qquad (2)$$

Dann ist mit x_0, x_1, x_2, x_3 gleichbedeutend das Wertsystem ρx_0, ρx_1, ρx_2, ρx_3 ($\rho = 0$ ausgeschlossen). Für gegen Null konvergierendes x_0 werden x, y, z unendlich groß, so daß $x_0 = 0$ die Gleichung der unendlichfernen Ebene bedeutet. Die Werte von (2) in (1) eingetragen ergibt:

$$(x_1 - a x_0)^2 + (x_2 - b x_0)^2 + (x_3 - c x_0)^2 - r^2 x_0^2 = 0 \qquad (3)$$

Zum Schnitt gebracht mit der unendlichfernen Ebene $x_0 = 0$ liefert die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

[14]) Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Teil II, S. 282.

[15]) Cayley l. c. [8]).

Daß die Konstanten a, b, c, r, die die einzelnen Kugeln charakterisieren, nicht mehr in den Gleichungen (4) vorkommen, sagt eben aus, daß dieses Gebilde allen Kugeln gemeinsam ist. (4) sind die gesuchten Gleichungen des absoluten Kegelschnittes. Man kann auch umgekehrt zeigen, daß jede Fläche zweiter Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt enthält, notwendig eine Kugel ist[16]). Die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

für sich betrachtet, stellt einen Kegel dar mit dem Koordinatenanfang als Scheitel, der zugleich der einzige reelle Punkt des Kegels ist. Erst bei Hinzunahme der Gleichung der unendlichfernen Ebene wird aus dem Kegel (den wir auch als Kugel vom Radius Null ansehen dürfen), der absolute Kegelschnitt herausgeschnitten, woraus übrigens nicht folgt, daß seine Punkte unendlich fern liegen. Denn berechnen wir den Abstand irgend eines Punktes (x_0, x_1, x_2, x_3) etwa vom Koordinatenanfang, so ist:

$$d = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_0}$$

Für die Punkte des absoluten Kegelschnittes liefert diese Formel $d = \frac{0}{0}$, d. h. einen unbestimmten Wert; der absolute Kegelschnitt hat also jede Entfernung, womit übereinstimmt, daß er allen Kugeln angehört. Da bei den Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen Kugeln immer wieder in Kugeln übergeführt werden und die unendlichferne Ebene in sich übergeht, so muß auch das Schnittgebilde, der absolute Kegelschnitt, in sich transformiert werden.

Da wir später die Gleichung des absoluten Kegelschnittes vornehmlich in Ebenenkoordinaten benötigen, so möge die Gleichung auch in dieser Gestalt noch hergeleitet werden.

Ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

die Gleichung einer Ebene in gewöhnlichen, rechtwinkligen Koordinaten, so kann man mit *Plücker* die Ebenenkoordinaten definieren als die negativen, reziproken Werte der Axenabschnitte, d. h.

---

[16]) Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie des Raumes, 5. Auflage, 1922, herausgegeben von K. Kommerell. Teil I, Lief. 1, S. 76.

$$u = -\frac{1}{a},\ v = -\frac{1}{b},\ w = -\frac{1}{c},$$

woraus: $$ux + vy + wz + 1 = 0$$

oder, wenn wir zu homogenen Koordinaten übergehen, und also setzen:

$$u = \frac{u_1}{u_0},\ v = \frac{u_2}{u_0},\ w = \frac{u_3}{u_0} \quad \text{und} \qquad (5)$$

$$x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0},\ z = \frac{x_3}{x_0},$$

so wird:

$$\sum_{i=0}^{3} u_i x_i \equiv u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \qquad (6)$$

Diese Gleichung stellt uns die Bedingung dar, die erfüllt sein muß, damit der Punkt (x_0, x_1, x_2, x_3) in der Ebene (u_0, u_1, u_2, u_3) liegt. Für konstante Werte von u und variable x-Werte erhalten wir eine Ebene als Ort von ∞^2 Punkten und umgekehrt für konstante Werte von x und variables u einen Punkt als Enveloppe von ∞^2 Ebenen.

Um nun zunächst die Gleichung der Kugel

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 - a x_0)^2 + (x_2 - b x_0)^2 + (x_3 - c x_0)^2 - r^2 x_0^2 = 0 \qquad (7)$$

in Ebenenkoordinaten aufzustellen, beachte man, daß die Tangentialebene im Punkte (y_0, y_1, y_2, y_3) der Kugel gegeben ist durch

$$\sum_{i\ 0}^{3} \frac{\partial f}{\partial y_i} x_i \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)_{x_0 = y_0} x_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_1 = y_1} x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x_2 = y_2} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{x_3 = y_3} x_3 = 0$$

Der Vergleich mit der obigen Inzidenzbedingung (6) für Punkt und Ebene liefert für die Koeffizienten die folgenden Bedingungen:

$$u_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)_{x_0 = y_0}$$

$$= -2\{(y_1 - a y_0)\, a + (y_2 - b y_0)\, b + (y_3 - c y_0)\, c + r^2 y_0\}$$

$$u_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_1 = y_1} = 2(y_1 - a y_0)$$

$$u_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x_2 = y_2} = 2(y_2 - by_0)$$

$$u_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{x_3 = y_3} = 2(y_3 - cy_0)$$

Da die y_i die Gleichung (7) befriedigen, so folgt hieraus, wenn wir die zuletzt berechneten Klammerausdrücke in die in y statt in x geschriebene Gleichung (7) eintragen, als Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ und dem Radius r in Ebenenkoordinaten:

$$r^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - (au_1 + bu_2 + cu_3 + u_0)^2 = 0 \quad (8)$$

Also auf ein cartesisches Koordinatensystem bezogen

$$r^2(u^2 + v^2 + w^2) - (au + bv + cw + 1)^2 = 0 \quad (9)$$

Eine dazu konzentrische Kugel besitzt die Gleichung:

$$r_1^2(u^2 + v^2 + w^2) - (au + bv + cw + 1)^2 = 0 \quad (9a)$$

Die Koordinaten der gemeinsamen Tangentialebenen zweier konzentrischer Kugeln und damit auch diejenigen des ganzen konzentrischen Büschels genügen somit den beiden Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 0 \\ au + bv + cw + 1 = 0 \end{cases}$$

Wählen wir ein anderes Büschel konzentrischer Kugeln, mit dem Mittelpunkt $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, so werden zwei Kugeln dieses Büschels entsprechend (9) und (9a) gegeben sein durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \rho^2(u^2 + v^2 + w^2) - (\alpha u + \beta v + \gamma w + 1)^2 = 0 \\ \rho_1(u^2 + v^2 + w^2) - (\alpha u + \beta v + \gamma w + 1)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Dann genügen wiederum die gemeinsamen Tangentialebenen aller dieser Kugeln (11) den Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 0 \\ \alpha u + \beta v + \gamma w + 1 = 0 \end{cases}$$

Da in (10) und (12) die erste der beiden Gleichungen jedesmal dieselbe ist, so erkennt man, daß die Gesamtheit aller gemeinsamen Tangentialebenen von Büscheln konzentrischer Kugeln der Gleichung:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0 \quad (13)$$

genügt. Sie ist die Gleichung des absoluten Kegelschnittes betrachtet als Enveloppe seiner ∞^2 Tangentialebenen.

Um zum Schlusse dieses Kapitels noch ein elementares Beispiel für die Einordnung der Begriffe der Elementargeometrie in die projektive Auffassung zu geben, greifen wir den Begriff des Winkels in der Ebene heraus. Was den andern Grundbegriff der metrischen Geometrie anbelangt, den Begriff der Entfernung, so sei auf die Darstellung bei *Klein*[17]) oder *Sommer*[18]) hingewiesen.

Es ist das Verdienst des französischen Mathematikers *Laguerre*, im Jahre 1853 in einer Jugendarbeit „Über die Theorie der Brennpunkte“ [19]) den Winkel zweier Geraden rein projektiv als ein Doppelverhältnis definiert zu haben. Zur Herleitung seines Resultates schlagen wir folgenden Weg ein:

Wir fixieren die Richtung eines Strahles der mit der x-Axe den Winkel φ einschließt dadurch, daß wir ihm einen Parameter μ zuordnen, für welchen

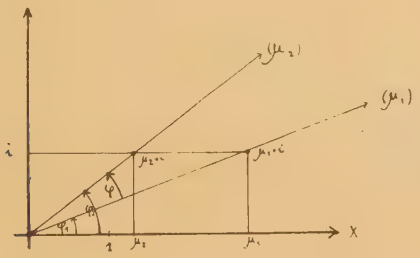
$$\mu = \operatorname{cotg} \varphi,$$

wobei für

$$0 \leqq \varphi \leqq \pi,$$

$$+\infty \geqq \mu \geqq -\infty$$

wird.



Schließen nun die beiden Strahlen

$$\mu_1 = \operatorname{cotg} \varphi_1$$
$$\mu_2 = \operatorname{cotg} \varphi_2$$

den Winkel

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

ein, so betrachten wir das Doppelverhältnis $D_{1,2}$ der beiden Richtungen μ_1, μ_2 und der beiden Richtungen

---

[17]) Klein, l. c. [14]) S. 317.

[18]) Sommer, l. c. [9]) S. 812.

[19]) Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris 1853, t. 12 pag 64. „Note sur la théorie des foyers“, wieder abgedruckt in Laguerre, Oeuvres II. Paris 1905, pag. 12—13.

i und $-i$ nach den beiden absoluten Punkten (die hier, wo es sich um ein ebenes Problem handelt, an Stelle des absoluten Kegelschnittes treten):

$$D_{1,2} \equiv (\mu_1, \mu_2, -i, +i) = \frac{\mu_1 + i}{\mu_1 - i} : \frac{\mu_2 + i}{\mu_2 - i}$$

$$= \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1} : \frac{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}$$

$$= (\cos 2\varphi_1 + i\sin 2\varphi_1) : (\cos 2\varphi_2 + i\sin 2\varphi_2)$$

$$= e^{2\varphi_1 i} : e^{2\varphi_2 i} = e^{2i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\frac{i}{2} \ln D_{1,2} = \frac{i}{2} 2i(\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln D_{1,2}$$

d. h.: Der Winkel zweier Geraden ist gleich der halben imaginären Einheit multipliziert mit dem natürlichen Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses, das gebildet wird durch die beiden Schenkel des Winkels und durch die beiden nach den absoluten Punkten gerichteten Geraden.

ZWEITES KAPITEL

Die automorphe Kollineationsgruppe G_7 des Kreiszylinders[20].

§ 1. Der Kreiszylinder und seine Parameterdarstellung.

Sind (x, y, z) rechtwinklig cartesische Punktkoordinaten, so ist die Fläche des Kreiszylinders, vom Radius r, gegeben in der Form:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = \text{beliebig.}$$

Um von den trigonometrischen Funktionen zu rationaler Parameterdarstellung überzugehen, bedienen wir uns in bekannter Weise der Formeln:

$$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$$

Nehmen wir der Einfachheit wegen $r = 1$ an, und setzen wir, um zu einer geeigneten Schreibweise in homogener Gestalt zu gelangen:

[20]) Man vergleiche die für dieses ganze Kapitel grundlegende Arbeit von: H. Mohrmann, Über die automorphe Kollineationsgruppe des rationalen Normalkegels n^{ter} Ordnung. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXXI 1° Semestre 1911, S. 170—200. In dieser Arbeit wird von viel höheren und allgemeineren Gesichtspunkten aus die Gruppe des rationalen Normalkegels n^{ter} Ordnung untersucht, vor allem auch im Hinblick auf die Unterschiede in der Struktur der Kollineationsgruppe, die sich für gerades und ungerades n ergeben, was seinen tieferen Grund in den verschiedenen Zusammenhangsverhältnissen der Kegel gerader und ungerader Ordnung im Sinne der Analysis situs hat.

$$t = \frac{t_2}{t_1},\ x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0},\ z = \frac{t_{33}}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{x_3}{x_0}$$

so wird:

$$(1)\quad \begin{cases} x_0 = t_1^2 + t_2^2 \\ x_1 = t_1^2 - t_2^2 \\ x_2 = 2 t_1 t_2 \\ x_3 = t_{33} \end{cases}$$

Das sind die gewünschten *Gleichungen des Zylinders in homogener Parameterdarstellung.* Bei dieser besonderen Art von Homogenität ist mit dem Wertsystem

$$t_1,\ t_2,\ t_{33}$$

gleichbedeutend das System

$$\rho t_1,\ \rho t_2,\ \rho^2 t_{33} \quad \rho \neq 0$$

einzig und allein die Werte 0, 0, 0 ausgeschlossen.

Diese Koordinaten t_1, t_2, t_{33} spielen für den Zylinder, als Punktgebilde betrachtet, dieselbe Rolle, wie die gewöhnlichen homogenen Koordinaten t_0, t_1, t_2, für die Gebilde, die Trägerinnen ternärer Gebiete sind.

Wenn also t_1 und t_2 je das Gewicht 1 haben, so bekommt t_{33} das Gewicht 2, was eben durch den Doppelindex angedeutet werden soll. Man erkennt ferner leicht, daß die Parameterdarstellung umkehrbar eindeutig ist. Jedem Wertsystem t_1, t_2, t_{33} entspricht sicher nur ein System von x-Werten, aber auch umgekehrt; denn ist

$$t_1 = \pm\sqrt{\frac{x_0 + x_1}{2}},\ t_2 = \pm\sqrt{\frac{x_0 - x_1}{2}},\ t_{33} = x_3,$$

wobei auf Grund von

$$t_1 \cdot t_2 = \tfrac{1}{2} x_2$$

bestimmt ist, ob beide Wurzeln gleiches Vorzeichen erhalten oder nicht, so ergeben sich, der „schiefen Homogenität" wegen, die Wertsysteme:

$$t_1, t_2, t_{33} \quad \text{und} \quad -t_1, -t_2, t_{33}$$

als gleichbedeutend, wie auch bei ungleichem Vorzeichen der Wurzeln

$$-t_1, t_2, t_{33} \quad \text{und} \quad t_1, -t_2, t_{33}.$$

Eliminieren wir die Parameter aus (1), so folgt als Gleichung des Zylinders, bezogen auf ein Polartetraeder:

$$(2)\qquad x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$$

Im Hinblick auf spätere Betrachtungen schließen wir an diese Darstellung noch die folgenden Bemerkungen: Für den unendlichfernen Punkt des Zylinders folgt:

$$(3) \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Eine Ebene in allgemeiner Lage ist gegeben als lineare Verbindung der Koordinaten:

$$(4) \quad a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

Sie schneidet den Zylinder nach einer Kurve zweiter Ordnung, die wir aus der obigen Gleichung durch Einsetzen der x-Werte aus (1) erhalten:

$$(a_0 + a_1) t_1^2 + (a_0 - a_1) t_2^2 + 2 a_2 t_1 t_2 + a_3 t_{33} = 0$$

$$(5) \quad A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + A_{12} t_1 t_2 + A_3 t_{33} = 0$$

Soll die Ebene (4) durch den unendlichfernen Punkt des Zylinders gehen, so müssen die Koordinaten (3) dieses Punktes die Gleichung der gesuchten Ebene befriedigen; sie lautet deshalb:

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

Für eine Ebene durch die Axe des Zylinders, das ist die Gerade, die die beiden Punkte $x_0 = x_1 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ verbindet, folgt:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

Sie schneidet den Zylinder in zwei Erzeugenden, die den beiden reellen Lösungen der quadratischen Gleichung

$$a_1 (t_1^2 - t_2^2) + 2 a_2 t_1 t_2 = 0$$

zugeordnet sind. Soll die Ebene $a_0 x_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$ speziell Tangentialebene sein, so muß die Beziehung bestehen:

$$a_1^2 + a_2^2 - a_0^2 = 0$$

Die Mantellinien des Zylinders endlich sind gegeben durch Gleichungen der Gestalt:

$$b_1 t_1 - b_2 t_2 = 0 \text{ oder } \frac{t_2}{t_1} = \text{const.}$$

§ 2. Die projektiven Transformationen, die den Zylinder in sich überführen, und ihre endlichen Gleichungen.

Jede projektive Transformation, welche den Zylinder in sich transformiert, vertauscht notwendig dessen Mantellinien untereinander, denn bei jeder projektiven Transformation gehen gerade Linien immer wieder in solche über. Diese Vertauschung geschieht durch die folgende binäre Transformation der Parameter t_1 und t_2:

$$\begin{cases} t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2 \end{cases}$$

Sollen außerdem auch die irreduzibeln Normalkurven zweiter Ordnung des Zylinders, welche durch die Ebenen (4) aus der Fläche ausgeschnitten werden, wieder in solche übergehen, so müssen wir, da bei jeder projektiven Transformation Ebenen in Ebenen übergehen, zu den vorigen Ausdrücken eine in t_1^2, $t_1 t_2$, t_2^2 und t_{33} lineare, homogene Funktion hinzunehmen. Demnach hat jede solche Transformation, die den Zylinder in sich überführt, notwendig die folgende Gestalt:

$$(6) \quad \begin{cases} t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2 \\ t_{33}^* = c_{11} t_1^2 + c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2 + c_{33} t_{33} \end{cases}$$

Dabei ist der „schiefen Homogenität" wegen das Koeffizientensystem:

$$a,\ b,\ c$$

gleichwertig mit jedem System:

$$\rho a,\ \rho b,\ \rho^2 c.$$

Sollen die Gleichungen (6) auch nach den „ungesternten" t auflösbar sein, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß die Substitutionsdeterminante nicht verschwindet, d. h. es müssen die beiden folgenden Ungleichungen bestehen:

$$(7) \quad \begin{cases} \delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ c_{33} \neq 0, \end{cases}$$

die in den folgenden Ausführungen stets als erfüllt vorausgesetzt werden.

Daß die Transformationen (6) eine Gruppe bilden, ist leicht einzusehen. Seien T und T* zwei dieser Transformationen, also:

$$T: \quad \begin{aligned} t_1^* &= a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2^* &= b_1 t_1 + b_2 t_2 \\ t_{33}^* &= c_{11} t_1^2 + c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2 + c_{33} t_{33} \end{aligned}$$

$$T^* \quad \begin{aligned} t_1^{**} &= a_1^* t_1^* + a_2^* t_2^* \\ t_2^{**} &= b_1^* t_1^* + b_2^* t_2^* \\ t_{33}^{**} &= c_{11}^* t_1^{*2} + c_{12}^* t_1^* t_2^* + c_{22}^* t_2^{*2} + c_{33}^* t_{33}^* \end{aligned}$$

so wird auch:

$$T^{**} = T^* T,$$

(T** gebildet durch Eintragen der Werte von T in die Formeln T*) wieder eine Transformation der ursprünglichen Art sein, und zwar gilt wiederum, wie zu fordern ist:

$$(8) \quad \begin{cases} \delta^{**} = \delta^* \cdot \delta \neq 0 \\ c_{33}^{**} = c_{33}^* \cdot c_{33} \neq 0 \end{cases}$$

sofern nur T und T* zwei Transformationen sind, deren jede für sich den Ungleichungen (7) genügt.

Zu jeder Transformation existiert ferner unter den gemachten Voraussetzungen auch die inverse, die man leicht durch Berechnen der „ungesternten" t aus (6) ermittelt. — Damit ist aber gezeigt, daß die obigen Transformationen (6) eine Gruppe bilden. Beachten wir, daß die Formeln (6) acht Parameter enthalten, wovon sieben wesentliche sind, so läßt sich zusammenfassend sagen:

Die Transformationen, welche den Kreiszylinder in sich transformieren, bilden eine endliche, kontinuierliche, siebengliedrige Gruppe (wobei endlich und kontinuierlich im *Lie*'schen Sinne zu verstehen sind).

Sehen wir zu, welche Transformationen der x durch die obigen Formeln (6) induziert werden. Durch Einsetzen der Werte (6) in die Formeln (1), in denen wir auch überall statt der „gesternten" Größen die „ungesternten" schreiben dürfen, gehen die folgenden Gleichungen hervor, wenn wir noch eine leicht ersichtliche Umformung anbringen:

$$
(9)\quad \begin{cases}
x_0^* = t_1^{*2} + t_2^{*2} = \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2)x_0 \\
\qquad + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2)x_1 + (a_1a_2 + b_1b_2)x_2 \\
x_1^* = t_1^{*2} - t_2^{*2} = \frac{1}{2}(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2)x_0 \\
\qquad + \frac{1}{2}(a_1^2 - b_1^2 - a_2^2 + b_2^2)x_1 + (a_1a_2 - b_1b_2)x_2 \\
x_2^* = 2t_1^*t_2^* = (a_1b_1 + a_2b_2)x_0 + (a_1b_1 - a_2b_2)x_1 \\
\qquad + (a_1b_2 + a_2b_1)x_2 \\
x_3^* = t_{33}^* = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{22})x_0 + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{22})x_1 \\
\qquad + \frac{1}{2}c_{12}x_2 + c_{33}x_3
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen sind linear in den x, stellen demnach Kollineationen dar, und zwar, wie aus dem früheren hervorgeht, die Gesamtheit aller Kollineationen, die den Zylinder in sich transformieren. Sie sind *die Gleichungen der automorphen Kollineationsgruppe G_7 des Kreiszylinders.*

Für die Determinante D der Gleichungen (9) ergibt die Rechnung:

$$D = c_{33} \cdot \delta^3 \qquad (10)$$

Sie ist unter den Voraussetzungen (7) von Null verschieden.

§ 3. Die G_7 als gemischte Gruppe und die geometrische Deutung der charakteristischen Eigenschaften der reellen Scharen.

Wenn wir bisher die Parameter der Transformation auch als komplexer Werte fähig betrachtet haben, so wollen wir uns im folgenden auf reelle Gruppen beschränken, worunter wir mit *Lie*[21]) solche verstehen, bei denen sowohl die Veränderlichen wie auch die Parameter auf reelle Werte beschränkt bleiben.

Um nun eine Trennung der reellen kontinuierlichen Scharen von Transformationen zu ermöglichen, schreiben wir in den Formeln (6), (7) und (9) des vorigen Paragraphen an Stelle von c_{33}:

$$c_{33} = k \cdot \delta \qquad (11)$$

[21]) Lie, l. c. [7]) Bd. III, S. 360.

Dabei ist k wegen der soeben ausgesprochenen Beschränkung auf das Reelle sicher eine reelle Zahl, die außerdem vom Proportionalitätsfaktor ρ unabhängig ist, da bei der vorliegenden besonderen Art von Homogenität nicht nur δ, sondern auch c_{33} vom Gewichte 2 ist. Insbesondere ist das Vorzeichen von k wesentlich und kann nicht durch andere Wahl des Proportionalitätsfaktors geändert werden.

Dies vorausgeschickt, greifen wir aus der Gesamtheit der Transformationen:

$$\begin{aligned} t_1^* &= a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2^* &= b_1 t_1 + b_2 t_2 \\ t_{33}^* &= c_{11} t_1^2 + c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2 - k \cdot \delta t_{33} \end{aligned} \qquad \delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

diejenigen heraus, für welche:

$$\left.\begin{matrix} k > 0 \\ \delta > 0 \end{matrix}\right\} \quad (12)$$

Man erkennt leicht, daß diese Transformationen eine Schar bilden, die für sich wieder Gruppeneigenschaft besitzt. Sind nämlich T und T* zwei Transformationen, die den vorigen Ungleichungen (12) genügen, so ist für $T^{**} = T^* T$, wegen der Formeln (8):

$$\begin{aligned} k^{**} &= k^* \cdot k > 0 \\ \delta^{**} &= \delta^* \cdot \delta > 0 \end{aligned}$$

Es entstehen somit aus zwei Transformationen, die (12) genügen, immer wieder solche Transformationen. Beachten wir außerdem, daß auch zu jeder Transformation die inverse existiert, die ebenfalls den Ungleichungen genügt, sofern es die ursprüngliche tut, so können wir aussagen:

Die im Komplexen kontinuierliche Gruppe G_7 ist im reellen Gebiet gemischt; sie enthält eine erste Schar von Transformationen, welche für sich Gruppeneigenschaft besitzt und charakterisiert ist durch die Ungleichungen (12).

Betrachten wir die drei übrigen noch möglichen Fälle, für welche:

$$\left.\begin{matrix} k > 0 \\ \delta < 0 \end{matrix}\right\} \quad (12a) \qquad \left.\begin{matrix} k < 0 \\ \delta > 0 \end{matrix}\right\} \quad (12b) \qquad \left.\begin{matrix} k < 0 \\ \delta < 0 \end{matrix}\right\} \quad (12c)$$

sind, so bildet die Gesamtheit der Transformationen, die durch je eines dieser drei Systeme von Ungleichungen charakterisiert ist, wiederum eine kontinuierliche Schar von Transformationen, die jedoch, im Gegensatz zur Schar (12), nicht mehr Gruppeneigenschaft besitzt. Für zwei Transformationen T und T*, die aus irgend einer und derselben Schar (12a), (12b) oder (12c) gewählt werden, ist nämlich stets:

$$k^{**} = k^* k > 0$$
$$\delta^{**} = \delta^* \delta > 0,$$

so daß immer wieder Transformationen der ersten Schar erhalten werden. Wir können demnach zusammenfassend sagen:

Von den vier getrennten kontinuierlichen Scharen, in welche die G_7 im Reellen zerfällt, und die charakterisiert sind durch die folgenden Paare von Ungleichungen:

$$\begin{cases} k>0 \\ \delta>0 \end{cases} \quad \begin{cases} k>0 \\ \delta<0 \end{cases} \quad \begin{cases} k<0 \\ \delta>0 \end{cases} \quad \begin{cases} k<0 \\ \delta<0 \end{cases}$$

besitzt nur die erste Schar für sich Gruppeneigenschaft; dagegen bildet jede einzelne der drei übrigen Scharen zusammen mit der ersten Schar wiederum eine Gruppe.

Dieser Satz gewinnt an Deutlichkeit, wenn wir uns zur geometrischen Interpretation seines Inhaltes wenden. Dazu ist es notwendig, eine kurze Betrachtung über reelle, projektive Beziehungen auf ein und demselben Träger eines binären Gebietes vorauszuschicken, die auch für spätere Untersuchungen nützlich sein wird.

Es sei

$$\begin{aligned} \sigma t_1^* &= a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ \sigma t_2^* &= b_1 t_2 + b_2 t_2 \end{aligned} \qquad (13)$$

der analytische Ausdruck dieser Projektivität, wobei

$$a_i \text{ und } b_i \text{ reell, } \delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

vorausgesetzt sind. Dann gibt es im allgemeinen zwei Punkte P_1 und P_2, Doppelpunkte oder Koinzidenzpunkte geheißen, die mit ihren entsprechenden Punkten P_1^* und P_2^* zusammenfallen.

Für diese Punkte ist:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma t_1 = a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ \sigma t_2 = b_1 t_1 + b_2 t_2 \end{array}\right. \text{ oder } \left.\begin{array}{l} (a_1 - \sigma) t_1 + a_2 t_2 = 0 \\ b_1 t + (b_2 - \sigma) t_2 = 0 \end{array}\right\} \quad (14)$$

Diese Gleichungen können nur dann gleichzeitig bestehen,

wenn $\begin{vmatrix} a_1 - \sigma & a_2 \\ b_1 & b_2 - \sigma \end{vmatrix} \equiv \sigma^2 - (a_1 + b_2)\sigma + \delta = 0$ ist.

(Charakteristische Gleichung.) Sind σ_1 und σ_2 die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, also $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \delta$, so ergeben sich die Doppelelemente durch Einsetzen dieser Werte in eine der Gleichungen (14).

Diese Koinzidenzpunkte haben nun die wichtige Eigenschaft, mit jedem Paar von Punkten $P(t_1, t_2)$ und $P^*(t_1^*, t_2^*)$, die einander auf Grund der Gleichungen (13) zugeordnet sind, immer ein konstantes Doppelverhältnis zu bilden, dessen Wert eine für die betreffende Projektivität charakteristische Invariante darstellt, und zwar gilt[22]):

$$(P_1 P_2 P P^*) = \vartheta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Nun sind aber verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Ist

$$\text{I.} \quad \sigma_1 \neq \sigma_2,$$

so läßt sich durch geeignete Wahl des Koordinatensystems erreichen, daß die Gleichungen (13) die Gestalt annehmen:

$$\begin{array}{l} \mu_1^* = \sigma_1 \mu_1 \\ \mu_2^* = \sigma_2 \mu_2, \end{array} \quad (15)$$

wobei den beiden Koinzidenzpunkten P_1 und P_2 die Gleichungen $\mu_2 = 0$ bezw. $\mu_1 = 0$ zukommen.

$$\text{A)} \quad \sigma_1 = \bar{\sigma}_2$$

(wo hier, wie im folgenden $\bar{\sigma}$ die zu σ konjugiert komplexe Größe bedeutet). Das ist die sogenannte *elliptische Projektivität;* sie ist *gleichsinnig*[23]), d. h. die Bewegung

[22]) Man vergleiche dazu z. B. Doehlemann, Geometrische Transformationen I, Sammlg. Schubert, Bd. XXVII, S. 80 ff.

[23]) z. B. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie, 2. Auflage, 1915, S. 94 ff.

zweier entsprechender Punkte (μ_1, μ_2) und (μ_1^*, μ_2^*) erfolgt im gleichen Sinn. Es wird in diesem Fall:

$$\delta = \sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0$$

B) σ_1 und σ_2 reell

1) $\operatorname{sign} \sigma_1 = \operatorname{sign} \sigma_2$

Das ist die *hyperbolische Projektivität,* in der zwei entsprechende Elemente die Doppelelemente nicht trennen. Sie ist wiederum *gleichsinnig* und auch hier gilt:

$$\delta = \sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0$$

2) $\operatorname{sign} \sigma_1 = -\operatorname{sign} \sigma_2$

Wiederum ist das eine *hyperbolische Projektivität,* aber hier trennen zwei entsprechende Elemente die Doppelelemente. Sie ist *ungleichsinnig* und es ist:

$$\delta = \sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$$

Unter A) sowohl wie unter B) ist ferner möglich, daß

$$\sigma_1 = -\sigma_2$$

wird, und zwar im Falle A), wenn σ_1 und σ_2 rein imaginär sind, bei B), wenn $|\sigma_1| = |\sigma_2|$. Dann wird:

$$(P_1 P_2 P P^*) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -1 = (P_1 P_2 P^* P)$$

Die Beziehung heißt in diesem Fall *involutorisch,* P_1 und P_2 werden durch P und P* *harmonisch* getrennt.

II. $\sigma_1 = \sigma_2$

Dann sicher reell. Die Projektivität ist *parabolisch,* wiederum *gleichsinnig,* wenn sie nicht zur *Identität* ausartet. Wir erhalten wieder:

$$\delta = \sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0$$

An Stelle der Gleichungen (15) treten in diesem Fall die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^* &= \sigma_1 \lambda_1 + a\lambda_2 \\ \lambda_2^* &= \sigma_1 \lambda_2 \end{aligned}\right\} \text{ oder auch } \left.\begin{aligned} \lambda_1^* &= \sigma_2 \lambda_1 \\ \lambda_2^* &= b\lambda_1 + \sigma_2 \lambda_2 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

wie man sich leicht durch Aufstellen der charakteristischen Gleichung überzeugt. Die Identität ergibt sich für $a = 0$ bezw. $b = 0$.

Aus diesen Betrachtungen ersieht man, und darauf allein kommt es an dieser Stelle an, daß in jedem der obigen Fälle *positiven Werten von* δ *gleichsinnige, negativen Werten ungleichsinnige Projektivitäten* entsprechen. Damit gewinnen wir die Erkenntnis:

Die Transformationen der reellen Scharen der G_7*, für welche* $\delta > 0$ *ist, vertauschen die Mantellinien des Zylinders gleichsinnig oder lassen sie im Falle der Identität in Ruhe; die Scharen, für welche* $\delta < 0$ *ist, vertauschen die Mantellinien ungleichsinnig.*

Welche Rolle das Vorzeichen von k spielt, ist nun ebenfalls leicht zu erkennen. Beachten wir, wie schon früher bemerkt wurde, daß die Gleichung der Erzeugenden durch $\frac{t_1}{t_2} = \text{const.}$ gegeben ist, so muß der Ausdruck:

$$t_{33}^* = k \cdot \delta t_{33} + \text{Konst}$$

für die Lagenbeziehung der Punkte einer und derselben Mantellinie vor und nach der Transformation ausschlaggebend sein. Es gilt daher der Satz:

Die Transformationen der reellen Scharen der G_7*, für welche* $\operatorname{sign} k = \operatorname{sign} \delta$ *ist, vertauschen die Punkte einer und derselben Erzeugenden, wobei diese als Träger einer Punktreihe aufgefaßt ist, gleichsinnig, die beiden andern Scharen ungleichsinnig.*

§ 4. Die Zusammensetzung der G_7.

Sophus Lie hat in seiner „Theorie der Transformationsgruppen" ganz allgemein bewiesen[24]), daß die $n(n+2)$ gliedrige Kollineationsgruppe des R_n einfach ist, d. h. keine invarianten Untergruppen besitzt. Somit ist auch die allgemeine projektive Gruppe der geraden Linie ($n = 1$) einfach. Dann folgt aus den Gleichungen:

$$(6a) \quad \begin{cases} t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2 \\ t_{33}^* = c_{11} t_1^2 + c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2 + k \delta t_{33}, \end{cases}$$

[24]) Bd. I, S. 560.

daß invariante Untergruppen der automorphen Gruppe (6a), bei denen nicht alle Mantellinien des Zylinders in Ruhe bleiben, nur erhalten werden durch Spezialisierung von k.

Nach dieser Vorbemerkung läßt sich nun ohne Schwierigkeit die Struktur der G_7 ermitteln. Man sieht leicht, daß

$$k = 1$$

eine invariante Untergruppe G_6 der Gruppe G_7 liefert. An Stelle der allgemeinen Formeln (6a) treten dann die Ausdrücke

$$T\begin{cases} t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2 \\ t_{33}^* = c_{11} t_1^2 + c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2 + \delta t_{33} \end{cases} \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Um den Nachweis zu erbringen, daß die so definierte G_6 eine invariante Untergruppe der G_7 ist, müssen wir zeigen, daß wenn wir irgend eine Transformation der G_6, etwa die obige T mit einer beliebigen Transformation S aus G_7 transformieren, d. h. STS^{-1} bilden, das Resultat $T^1 = STS^{-1}$ wieder eine Transformation aus G_6 ist.

Es sei:

$$S\begin{cases} t_1^{**} = \text{——} \\ t_2^{**} = \text{——} \\ t_{33}^{**} = \text{——} + c_{33} t_{33}^* \end{cases}$$

(Die nicht ausgeschriebenen Glieder sind belanglos.)

so wird:

$$ST\begin{cases} t_1^{**} = \text{——} \\ t_2^{**} = \\ t_{33}^{**} = \text{——} + \delta c_{33} t_{33} \end{cases}$$

und wenn:

$$S^{-1}\begin{cases} t_1 = \\ t_2 = \text{——} \\ t_{33} = \text{——} + \dfrac{1}{c_{33}} t_{33}^* \end{cases}$$

ist, so folgt endlich:

$$STS^{-1}\begin{cases} t_1^{**} = \text{——} \\ t_2^{**} = \text{——} \\ t_{33}^{**} = \text{——} c_{33}\delta \cdot \dfrac{1}{c_{33}} t_{33}^* = \text{——} + \delta t_{33}^* \end{cases}$$

Das ist aber wieder eine Transformation T^1 vom Typus T w. z. b. w.

Diese Untergruppe G_6 läßt sich nun erweitern. Für

$$k = -1$$

erhält man eine kontinuierliche Schar H_6 von Transformationen, welche zusammen mit den Transformationen der G_6 eine Gruppe (G_6, H_6) bildet, die schon im Komplexen gemischt ist.

Auf Grund der früheren Überlegungen können nun andere Untergruppen nur dadurch erhalten werden, daß die Mantellinien einzeln in Ruhe bleiben, d. h. daß:

$$a_1 = b_2 \qquad a_2 = b_1 = 0.$$

Die so erhaltene Untergruppe G_4:

$$T \begin{cases} t_1^* = a_1 t_1 \\ t_2^* = \quad a_1 t_2 \\ t_{33}^* = c_{11} t_1^2 + c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2 + k\delta t_{33} \end{cases}$$

$$\delta = a_1^2 \neq 0, \quad c_{33} = k\delta \neq 0$$

ist eine invariante Untergruppe, wofür man den Beweis ganz analog wie oben zu erbringen hätte. Die G_4 zerfällt im Reellen in zwei diskrete, kontinuierliche Scharen, die charakterisiert sind durch:

$$k > 0 \text{ und } k < 0.$$

Nur die erste dieser beiden Scharen besitzt Gruppeneigenschaft.

Nehmen wir endlich die Bedingungen für die G_6 und G_4 zusammen, greifen wir also diejenigen Transformationen heraus, welche sowohl der G_6 als auch der G_4 angehören (Durchschnitt der beiden Gruppen), so erhalten wir eine dritte invariante Untergruppe G_3, definiert durch:

$$\begin{aligned} k = 1 \quad & a_1 = b_2 \quad a_2 = b_1 = 0 \\ & t_1^* = a_1 t_1 \\ & t_2^* = \quad a_1 t_2 \\ & t_{33}^* = c_{11} t_1^2 + c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2 + \delta t_{33} \\ & \delta = a_1^2 \neq 0 \qquad c_{33} = \delta \neq 0 \end{aligned}$$

Auch diese Gruppe läßt sich erweitern durch die kontinuierliche Schar H_3, für welche:

$$k = -1$$

ist. Die Transformationen der G_3 bilden zusammen mit denjenigen der kontinuierlichen Schar H_3 eine schon im

Komplexen gemischte Gruppe (G_3, H_3). Man erkennt leicht, daß die G_3 kommutativ, also eine Abel'sche Gruppe ist.

Wir haben damit die folgende Struktur gefunden:

und den *Satz:* Die Gruppe G_7 ist zusammengesetzt; sie enthält drei und nur drei invariante, kontinuierliche Untergruppen.

§ 5. Die geometrische Deutung der charakteristischen Eigenschaften der invarianten Untergruppen der G_7.

Um einen Einblick in die geometrische Bedeutung der invarianten Untergruppen zu erlangen, bestimmen wir zunächst die Koinzidenspunkte der allgemeinen Kollineationsgruppe G_7. Wir schreiben zu diesem Zwecke die Formeln (9) in der folgenden abgekürzten Gestalt, wobei sich die Werte der Koeffizienten α_{ik} und c^1_{ik} durch Vergleich mit den genanten Formeln sofort wieder ergeben:

$$\begin{aligned}
\rho x_0^* &= \alpha_{11} x_0 + \alpha_{12} x_1 + \alpha_{13} x_2 \\
\rho x_1^* &= \alpha_{21} x_0 + \alpha_{22} x_1 + \alpha_{23} x_2 \\
\rho x_2^* &= \alpha_{31} x_0 + \alpha_{32} x_1 + \alpha_{33} x_2 \\
\rho x_3^* &= c_{11}{}^1 x_0 + c_{12}{}^1 x_1 + c_{22}{}^1 x_2 + k\delta x_3
\end{aligned}$$

Die Koinzidenzpunkte berechnen sich dann aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(\alpha_{11} - \rho) x_0 + \alpha_{12} x_1 + \alpha_{13} x_2 &= 0 \\
\alpha_{21} x_0 + (\alpha_{22} - \rho) x_1 + \alpha_{23} x_2 &= 0 \\
\alpha_{31} x_0 + \alpha_{32} x_1 + (\alpha_{33} - \rho) x_2 &= 0 \\
c_{11}{}^1 x_0 + c_{12}{}^1 x_1 + c_{22}{}^1 x_2 + (k\delta - \rho) x_3 &= 0
\end{aligned}$$

Die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen dieser vier linearen, homogenen Gleichungen lautet:

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11} - \rho & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} - \rho & \alpha_{23} & 0 \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \rho & 0 \\
c_{11}{}^1 & c_{12}{}^1 & c_{22}{}^1 & k\delta - \rho
\end{vmatrix} = 0$$

oder auch:

$$(k\delta-\rho)\{\rho^3-\rho^2(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})+\rho\delta(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})-\delta^3\}=0$$

(Charakteristische Gleichung.)

Man findet sofort die beiden Wurzeln:

$$\rho = k\delta \text{ und } \rho = \delta;$$

die beiden andern ergeben sich aus der quadratischen Gleichung:

$$\rho^2+\rho(\delta-\alpha_{11}-\alpha_{22}-\alpha_{33})+\delta^2=0$$

Nun machen wir Gebrauch von den Resultaten der Hilfsbetrachtungen im § 3 dieses Kapitels. Aus den Formeln (15) und (16) folgt, daß *jede* Transformation, einzeln genommen, in der Form geschrieben werden kann:

$$(17)\quad \begin{cases} t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2^* = \quad b_2 t_2 \qquad\qquad \delta = a_1 b_2, \\ t_{33}^* = c_{11} t_1^2 + c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2 + k\delta t_{33} \end{cases}$$

sofern man nur immer das Koordinatensystem passend wählt. Dadurch erhalten wir für die erwähnten Gleichungen (9) die folgende Darstellung (nämlich für $b_1 = 0$ und $\rho = \frac{1}{a_1 b_2} = \frac{1}{\delta}$):

$$(18)\quad \begin{cases} \rho x_0^* = \dfrac{a_1^2+a_2^2+b_2^2}{2a_1b_2}x_0 + \dfrac{a_1^2-a_2^2-b_2^2}{2a_1b_2}x_1 + \dfrac{a_2}{b_2}x_2 \\ \rho x_1^* = \dfrac{a_1^2+a_2^2-b_2^2}{2a_1b_2}x_0 + \dfrac{a_1^2-a_2^2+b_2^2}{2a_1b_2}x_1 + \dfrac{a_2}{b_2}x_2 \\ \rho x_2^* = \dfrac{a_2}{a_1}x_0 \qquad\qquad - \dfrac{a_2}{a_1}x_1 + x_2 \\ \rho x_3^* = \dfrac{c_{11}+c_{22}}{2a_1b_2}x_0 + \dfrac{c_{11}-c_{22}}{2a_1b_2}x_1 + \dfrac{c_{12}}{2a_1b_2}x_2 + kx_3 \end{cases}$$

Dadurch wurde erreicht, daß die charakteristische Gleichung die folgende bemerkenswerte Gestalt annimmt:

$$(k-\rho)\left\{\rho^3-\frac{a_1^2+a_1b_2+b_2^2}{a_1b_2}\rho^2+\frac{a_1^2+a_1b_2+b_2^2}{a_1b_2}\rho-1\right\}=0$$

oder auch $(k-\rho)(\vartheta-\rho)(1-\rho)(\vartheta^{-1}-\rho)=0$ (19)

Dabei bedeutet:

$$\vartheta=\frac{a_1}{b_2}$$

die schon früher erwähnte (§ 3, Kap. II) charakteristische Invariante der durch die Formeln:

$$\begin{aligned} t_1^* &= a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2^* &= \quad b_2 t_2 \end{aligned}$$

dargestellten Projektivität. Geometrisch gesprochen ist ϑ das auf dem Zylinder genommene Doppelverhältnis:

$$\vartheta=(P_1 P_2 P P^*),$$

das die beiden Koinzidenz-Zylindererzeugenden P_1 und P_2 mit einer beliebigen Erzeugenden P und ihrer entsprechenden P* bilden.

Ist im *speziellen:* $a_1=b_2$ also $\vartheta=1$,

ohne daß jedoch die betreffende Transformation der G_4 angehört, für welche auch noch $a_2=0$ wäre und die Zylindererzeugenden einzeln in Ruhe blieben, so werden die Erzeugenden parabolisch vertauscht. Die Gleichung (19) nimmt die besondere Gestalt:

$$(k-\rho)(1-\rho)^3=0$$

an, d. h.: Alle drei vom unendlichfernen Punkt des Zylinders verschiedenen Koinzidenspunkte fallen zusammen und zwar in den Schnittpunkt der drei Ebenen:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_0 - x_1 &= 0 \\ a_1^2(k-1)x_3 + c_{11}x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Ebenen ergeben sich durch Eintragen von $a_1=b_2$ und $\rho=1$ in die der Berechnung der Koinzidenzpunkte dienenden Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^2+a_2^2+b_2^2}{2a_1b_2}-\rho\right)x_0 + \dfrac{a_1^2-a_2^2-b_2^2}{2a_1b_2}x_1 + \dfrac{a_2}{b_2}x_2 = 0 \\ \dfrac{a_1^2+a_2^2-b_2^2}{2a_1b_2}x_0 + \left(\dfrac{a_1^2-a_2^2+b_2^2}{2a_1b_2}-\rho\right)x_1 + \dfrac{a_2}{b_2}x_2 = 0 \\ \dfrac{a_2}{a_1}x_0 - \dfrac{a_2}{a_1}x_1 + (1-\rho)x_2 = 0 \\ \dfrac{c_{11}+c_{22}}{2a_1b_2}x_0 + \dfrac{c_{11}-c_{22}}{2a_1b_2}x_1 + \dfrac{c_{12}}{2a_1b_2}x_2 + (k-\rho)x_3 = 0 \end{cases}$$

Ist aber:

$$a_1 = -b_2 \text{ und mithin } \vartheta = -1,$$

so werden die Zylindererzeugenden involutorisch untereinander vertauscht. Gleichzeitig fallen zwei der von den drei vom unendlichfernen Punkt des Zylinders verschiedenen Koinzidenzpunkte zusammen, wie man unmittelbar der aus (19) folgenden Gleichung:

$$(k - \rho)(1 - \rho)(-1 - \rho)^2 = 0$$

entnimmt.

Im *allgemeinen*, wenn keiner der soeben angeführten Fälle eintritt, sind die vier Koinzidenzpunkte der G_7 alle voneinander verschieden. Der Wurzel:

$$\rho = k$$

von (19) entspricht der unendlichferne Punkt des Zylinders. Denn trägt man diesen Wert von ρ in (20) ein, so ergeben sich vier lineare homogene Gleichungen in den Variabeln x_0, x_1, x_2. Da die Matrix vom Range drei ist, so ist $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ das einzige Lösungssystem, und zwar stellen diese Gleichungen, wie schon im § 1 dieses Kapitels gezeigt wurde, den unendlichfernen Punkt des Zylinders dar.

Die übrigen Koinzidenzpunkte sind bestimmt durch die Wurzeln der reziproken Gleichung:

$$(\vartheta - \rho)(1 - \rho)(\vartheta^{-1} - \rho) = 0 \qquad (21)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen sind sie alle voneinander verschieden.

Wenn wir die vier Koinzidenzpunkte mit K_0, K_1, K_2, K_3 bezeichnen, entsprechend ihrer Reihenfolge in der geordneten Gleichung (19), so ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

$$\rho = k;\ K_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \rho = \vartheta = \frac{a_1}{b_2};\ K_1 \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \dfrac{c_{11}}{a_1 b_2} x_0 + \left(k - \dfrac{a_1}{b_2}\right) x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rho = 1;\ K_2 \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ (a_1 - b_2) x_1 + a_2 x_2 = 0 \\ [2 a_2 c_{11} + c_{12}(b_2 - a_1)] x_2 + 2 a_1 a_2 b_2 (k-1) x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rho = \vartheta^{-1} = \frac{b_2}{a_1};\ K_3 \begin{cases} [a_2^2 + (a_1 - b_2)^2]x_1 - [a_2^2 - (a_1 - b_2)^2]x_0 = 0 \\ [a_2^2 + (a_1 - b_2)^2]x_2 + 2a_2(a_1 - b_2)x_0 = 0 \\ 2b_2(a_1 k - b_2)[a_2^2 + (a_1 - b_2)^2]x_3 + 2[c_{11}a_2^2 \\ \quad + c_{22}(a_1 - b_2)^2 - c_{12}a_2(a_1 - b_2)]x_0 = 0 \end{cases}$$

Trifft es sich nun, daß eine der Wurzeln von (21) gleich k ist, also etwa:

$$\vartheta = k \text{ oder } 1 = k \text{ oder } \vartheta^{-1} = k,$$

so rückt ein weiterer Koinzidenzpunkt an den unendlichfernen Punkt des Zylinders heran. Es läßt sich nun aber beweisen:

Die Gesamtheit aller derjenigen Kollineationen der G_7, für welche ein beliebiger weiterer Koinzidenzpunkt an den unendlichfernen Punkt des Zylinders herangerückt ist, bildet keine Gruppe.

Um das zu zeigen, greifen wir zwei Kollineationen T_1 und T_2 heraus, von denen jede zwei Koinzidenzpunkte im Unendlichen besitzt:

$$T_1 \begin{cases} \rho x_0^* = \vartheta x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 \\ \rho x_1^* = B_1 x_0 + x_1 + B_2 x_2 \\ \rho x_2^* = C_1 x_0 + C_2 x_1 + \vartheta^{-1} x_2 \\ \rho x_3^* = \cdots\cdots + \vartheta x_3 \end{cases}$$

$$T_2 \begin{cases} \rho x_0^{**} = \Theta x_0^* + A_1^* x_1^* + A_2^* x_2^* \\ \rho x_1^{**} = B_1^* x_0^* + x_1^* + B_2^* x_2^* \\ \rho x_2^{**} = C_1^* x_0^* + C_2^* x_1^* + \Theta^{-1} x_2^* \\ \rho x_3^{**} = \cdots\cdots + \Theta^{-1} x_3^* \end{cases}$$

Bilden wir dann:

$$T_1 T_2 \begin{cases} \tau x_0^{**} = (\Theta\vartheta + A_1^* B_1 + A_2^* C_1)x_0 + (\Theta A_1 + A_1^* \\ \qquad + A_2^* C_2)x_1 + (\Theta A_2 + A_1^* B_2 + A_2^* \vartheta^{-1})x_2 \\ \tau x_1^{**} = \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau x_2^{**} = \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau x_3^{**} = \cdots\cdots\cdots\cdots + \Theta^{-1}\vartheta x_3 \end{cases}$$

Diese so entstehende Kollineation hat im allgemeinen, wie die Untersuchung der charakteristischen Gleichung lehrt, vier voneinander verschiedene Koinzidenzpunkte.

Die Gleichungen (17) resp. (18) gestatten nun noch eine andere Auffassung. Wir sahen, daß jede einzelne Transformation der Gruppe (6) oder jede einzelne Kollineation der Gruppe (9) pei passender Wahl des Koordinatensystems und des Proportionalitätsfaktors in der Gestalt (17) bzw. (18) geschrieben werden kann. Nun stellen uns aber diese letzten Gleichungen (18) auch die Gesamtheit aller derjenigen Kollineationen dar, die eine bestimmte Zylindererzeugende zur gemeinsamen Koinzidenzgeraden haben. Diese Kollineationen bilden eine sechsgliedrige nicht invariante Untergruppe U_6 der G_7. Die feste Koinzidenz-Zylindererzeugende ist $t_2 = 0$, wie aus den Gleichungen (17) sofort ermittelt werden kann.

Mittels dieser festen Koinzidenzgeraden läßt sich nun die Lagebeziehung der Koinzidenzpunkte auch geometrisch charakterisieren. Es ist nur zu beachten, daß bei jeder allgemeinen Kollineation einem beliebigen Koinzidenzpunkt eindeutig diejenige Koinzidenzebene zugeordnet werden kann, die den betreffenden Koinzidenzpunkt nicht enthält. Da sich die Koinzidenzebenen mit Bezug auf diese Zylindererzeugende $t_2 = 0$ eindeutig festlegen lassen, so gilt dasselbe auch für die Koinzidenzpunkte.

Derjenige Koinzidenzpunkt K_0, der im unendlichfernen Punkt des Zylinders liegt, der also der Wurzel $\rho = k$ von (19) entspricht, ist charakterisiert durch die Koinzidenzebene E_0 durch K_1, K_2, K_3, welche allein den Zylinder nach einer irreduzibeln Kurve zweiter Ordnung schneidet.

Die drei übrigen Koinzidenzebenen gehen alle durch K_0. Unter diesen gibt es zunächst eine Ebene E_1 durch K_0, K_2, K_3, welche die festgehaltene, die Untergruppe U_6 definierende Zylindererzeugende nicht enthält. Ihre Gleichung lautet:

$$E_1 : [(a_1 - b_2)^2 + a_2^2]x_0 + [(a_1 - b_2)^2 - a_2^2]x_1 + 2a_2(a_1 - b_2)x_2 = 0$$

Sie enthält die Zylindererzeugende:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{b_2 - a_1}{a_2}$$

doppelt, wobei, wie aus (17) folgt, $\frac{t_2}{t_1} = \frac{b_2 - a_1}{a_2}$ die nicht feste Koinzidenz-Zylindererzeugende bedeutet. Dieser Ebene E_1 ist zugeordnet, der auf der festen Koinzidenz-Zylindererzeugenden liegende Koinzidenzpunkt K_1.

Eine weitere Koinzidenzebene E_2 durch K_0, K_1, K_3, ist dadurch besonders bemerkenswert, daß sie jede der beiden Koinzidenz-Zylindererzeugenden, sowohl die feste als auch die andere, einfach enthält. Sie besitzt die Gleichung:

$$E_2 : a_2 x_0 - a_2 x_1 + (a_1 - b_2) x_2 = 0,$$

die für die Werte:

$$t_2 = 0 \text{ und } \frac{t_2}{t_1} = \frac{b_2 - a_1}{a_2}$$

erfüllt ist. Der Ebene E_2 entspricht der dem zweiten Faktor der Gleichung (21) zugeordnete Koinzidenzpunkt K_2. Er ist der einzige nicht auf dem Zylinder gelegene Koinzidenzpunkt und spielt nun eine ganz besondere Rolle, wie sich schon aus der über die zugehörige Koinzidenzebene gemachten Aussage vermuten läßt. Während wir oben bewiesen, daß die Gesamtheit aller derjenigen Kollineationen, für welche ein beliebiger weiterer Koinzidenzpunkt an den unendlichfernen Punkt des Zylinders herangerückt ist, keine Gruppe bildet, so zeigt sich nun hier, daß die Gesamtheit aller Kollineationen, für welche dieser ausgezeichnete Koinzidenzpunkt K_2 an den unendlichfernen Punkt des Zylinders heranrückt, eine invariante Untergruppe der G_7 bildet, und zwar ist es die durch den Wert $k = 1$ definierte und bereits früher als invariante Untergruppe erkannte G_6. Damit erhalten wir den Satz:

Die allgemeinen Kollineationen der invarianten kontinuierlichen Untergruppe G_6 der automorphen Kollineationsgruppe des Kreiszylinders haben die charakteristische Eigenschaft, daß der ausgezeichnete Koinzidenzpunkt der allgemeinen Kollineationen der G_7 an den unendlichfernen Punkt des Zylinders herangerückt ist; dabei ist der ausgezeichnete Koinzidenzpunkt derjenige, welcher dem Zylinder nicht angehört.

Die letzte der Koinzidenzebenen E_3 ist bestimmt durch die Punkte K_0, K_1, K_2 und hat die Gleichung:

$$x_1 - x_0 = 0.$$

Diese Ebene enthält die feste Koinzidenzgerade doppelt, die andere überhaupt nicht. Ihr ist zugeordnet der auf der nicht festgehaltenen Koinzidenzgeraden liegende Koinzidenzpunkt K_3.

Werfen wir noch einen Blick auf die beiden andern invarianten Untergruppen der G_7.

Die G_4 war charakterisiert durch:

$$a_1 = b_2 \quad a_2 = b_1 = 0, \quad \text{also } \delta = a_1^2.$$

Die Gleichungen (9) lauten dann:

$$\begin{aligned}
x_0^* &= a_1^2 x_0 \\
x_1^* &= a_1^2 x_1 \\
x_2^* &= a_1^2 x_2 \\
x_3^* &= \tfrac{1}{2}(c_{11} + c_{22}) x_0 + \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{22}) x_1 + \tfrac{1}{2} c_{12} x_2 + k a_1^2 x_3
\end{aligned}$$

oder metrisch geschrieben:

$$\begin{aligned}
x^* &= x \\
y^* &= y \\
z^* &= kz + c_1 x + c_2 y + c_3
\end{aligned}$$

Greifen wir eine bestimmte Mantellinie heraus, d. h. geben wir x und y feste Werte, so erkennt man aus der Gleichung:

$$z^* = kz + \text{const.},$$

daß die Transformationen der G_4 die Punkte der Zylindererzeugenden gleichsinnig oder ungleichsinnig vertauschen, je nachdem $k > 0$ oder $k < 0$ ist, in Übereinstimmung mit den früher gefundenen Resultaten (II, § 3).

Die Transformationen der G_4 sind Zentralkollineationen[25]) mit dem unendlichfernen Punkt des Zylinders als Kollineationszentrum und der Ebene:

$$z(k-1) + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

als Kollineationsebene.

Was endlich die G_3 anbetrifft, für welche auch noch $k = 1$ ist, so gilt für die Vertauschung der Punkte auf den Zylindererzeugenden die Gleichung:

$$z^* = z + c$$

---

[25]) Enriques, Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano. Atti della Reale Accademia dei Lincei, Ser. V, Vol. II, 1° semestre 1893, S. 533.

Das ist eine parabolische Transformation, eine gewöhnliche Parallelverschiebung einer metrischen Skala. Die Schar H_3, für welche $k = -1$ ist, ergibt

$$z^* = -z + c$$
$$z^* + z = c$$

Diese Gleichung bleibt ungeändert bei Vertauschung von z mit z* und stellt somit eine involutorische Transformation dar.

Die Transformationen der G_3 sind besondere Zentralkollineationen, da in diesem Fall die Kollineationsebene

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

durch das Zentrum der Kollineation hindurchgeht.

§ 6. Der Zylinder zweiter Art und die reellen Scharen seiner G_7.

Zu Beginn des § 3 dieses Kapitels wurde ausgeführt, was man nach *Lie* unter einer reellen Gruppe von Transformationen zu verstehen hat und im Anschluß daran die reellen Scharen der G_7 untersucht. Doch wurde an jener Stelle keineswegs die Frage nach den reellen Scharen erledigt, da nämlich zu dem bisher besprochenen Zylinder, der aus ∞^2 reellen Punkten besteht und fortan als Zylinder erster Art bezeichnet werden soll, noch eine zweite Art von Zylinder existiert, sofern man sich an die zuerst von dem italienischen Geometer *Segre*[26]) ausgesprochene Definition hält, wonach im komplexen Gebiete ganz allgemein ein Gebilde als reell oder imaginär zu bezeichnen ist, je nachdem es mit seinem konjugiert komplexen zusammenfällt oder nicht.

Dieser Zylinder, dessen Gleichungen weiter unten aus den Gleichungen (1) des Zylinders erster Art hergeleitet werden, ist für die Betrachtungen des folgenden Kapitels von größter Bedeutung. Mit seiner Hilfe gelingt, wie schon vorweg bemerkt werden soll, der Übergang zur Gruppe der Elementargeometrie; es tritt hier, wie in so vielen Gebieten der Mathematik in Evidenz, wie wertvoll es ist, das Imaginäre mit in die Betrachtung

[26]) Segre, Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgeprici, Math. Annalen, Bd. 40, 1892, S. 413—467.

einzubeziehen, nicht um seiner selbst willen, sondern weil es ganz unentbehrlich ist, zur Erreichung des gesteckten Hauptzieles: zum restlosen Verständnis des jeweils vorliegenden Problemes.

Bedeuten (x_0, x_1, x_2, x_3) die Koordinanten eines Punktes des Zylinders erster Art, so setzen wir, um zu den Gleichungen des Zylinders zweiter Art zu gelangen:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 \\ i\,y_1 &= x_1 \\ i\,y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \,, \end{aligned} \qquad i = \sqrt{-1}$$

woraus, auf Grund von (1) der folgende Zusammenhang zwischen den Parameterwerten $t_1\ t_2\ t_{33}$ und den homogenen Punktkordinanten y_i des Zylinders zweiter Art resultiert:

$$(22) \quad \begin{cases} y_0 = t_1^{\,2} + t_2^{\,2} \\ y_1 = \dfrac{1}{i}\,(t_1^{\,2} - t_2^{\,2}) \\ y_2 = \dfrac{2}{i}\,t_1\,t_2 \\ y_3 = t_{33} \end{cases}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen:

$$\begin{aligned} t_{33} &= t_{33}^{\,*} \\ t_1 &= t_2^{\,*} \\ t_2 &= -t_1^{\,*}, \end{aligned}$$

so geht, wie leicht ersichtlich ist, jeder Punkt (y_0, y_1, y_2, y_3) in seinen konjugiert komplexen $(y_0^{\,*}, y_1^{\,*}, y_2^{\,*}, y_3^{\,*})$.

Durch Elimination der Parameterwerte folgt aus (22) als Gleichung dieses Zylinders:

$$(23) \qquad y_0^{\,2} + y_1^{\,2} + y_2^{\,2} = 0.$$

Ihre Gestalt erinnert an die im ersten Kapitel gewonnene Gleichung des absoluten Kegelschnittes in Ebenenkoordinaten.

Die Formeln (6) liefern vermöge (22):

$$y_0^* = t_1^{*2} + t_2^{*2} = (a_1^2 + b_1^2)t_1^2 + 2(a_1a_2 + b_1b_2)t_1t_2 + (a_2^2 + b_2^2)t_2^2$$

$$y_1^* = \frac{1}{i}(t_1^{*2} - t_2^{*2}) = \frac{1}{i}\{(a_1^2 - b_1^2)t_1^2 + 2(a_1a_2 - b_1b_2)t_1t_2 + (a_2^2 - b_2^2)t_2^2\}$$

$$y_2^* = \frac{2}{i}t_1^*t_2^* = \frac{2}{i}\{a_1b_1t_1^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)t_1t_2 + a_2b_2t_2^2\}$$

$$y_3^* = t_{33}^* = c_{11}t_1^2 + c_{12}t_1t_2 + c_{22}t_2^2 + c_{33}t_{33}$$

und nach leichter Umformung:

$$(24)\quad \begin{cases} y_0^* = \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2)y_0 \\ \qquad + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2)iy_1 + (a_1a_2 + b_1b_2)iy_2 \\ y_1^* = -\frac{1}{2}(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2)iy_0 \\ \qquad + \frac{1}{2}(a_1^2 - b_1^2 - a_2^2 + b_2^2)y_1 + (a_1a_2 - b_1b_2)y_2 \\ y_2^* = -(a_1b_1 + a_2b_2)iy_0 + (a_1b_1 - a_2b_2)y_1 \\ \qquad + (a_1b_2 + a_2b_1)y_2 \\ y_3^* = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{22})y_0 + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{22})iy_1 \\ \qquad + \frac{1}{2}c_{12}iy_2 + c_{33}y_3 \end{cases}$$

Sollen die Gleichungen (6) auch zugleich die reelle automorphe Gruppe des Zylinders zweiter Art induzieren, so müssen, damit die vorigen Gleichungen (24) reell werden, die Koeffizienten von iy_1 und iy_2 in der ersten und vierten Zeile rein imaginär werden, ebenso die von iy_0 in der zweiten und dritten Zeile; allen übrigen Koeffizienten sollen reelle Werte zukommen.

Diesen Forderungen wird genügt, wenn zwischen den Koeffizienten von (6) die nachfolgenden Bedingungen erfüllt sind, die sich leicht berechnen lassen:

$$(25)\quad \begin{cases} b_1 = -\bar{a}_2 \quad c_{11} = \bar{c}_{22} \quad c_{33} = k \cdot \delta;\ k \text{ reell};\ \delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ b_2 = \bar{a}_1 \quad c_{12} = \bar{c}_{12} \\ \text{Setzen wir gemäß diesen Bedingungen:} \\ c_{11} = \alpha - i\beta \quad c_{12} = -2i\gamma \quad a_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \quad b_1 = -\alpha_2 + i\beta_2 \\ c_{22} = \alpha + i\beta \qquad\quad a_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \quad b_2 = \alpha_1 - i\beta_1 \end{cases}$$

so wird tatsächlich durch die Gleichungen (6) die reelle automorphe Kollineationsgruppe des Zylinders zweiter Art induziert, welche folgende Gestalt annimmt:

$$(26)\quad \begin{cases} y_0^* = (\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_2^2)\,y_0 - 2\,\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2\;\; y_1 \\ \qquad\qquad - 2\,\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\,y_2 \\ y_1^* = 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\,y_0 + (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_2^2)\,y_1 \\ \qquad\qquad + 2(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)\,y_2 \\ y_2^* = 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,y_0 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\,y_1 \\ \qquad\qquad + \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2)\,y_2 \\ y_3^* = \alpha y_0 + \beta y_1 + \gamma y_2 + c_{33}\,y_3 \end{cases}$$

Daß diese Gleichungen wirklich die automorphe Gruppe des Zylinders zweiter Art darstellen, erweist eine leichte, wenn auch umständliche Rechnung. Das Resultat lautet:

$$y_0^{*2} + y_1^{*2} + y_2^{*2} = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2)^2\,(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2)$$

Für δ folgt:

$$\delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2$$

Da das δ reell wird, so können wir den Satz aussprechen, der nicht ohne Weiteres vorauszusehen war:

Die über die reellen Scharen der G_7 des Zylinders erster Art gemachten Aussagen sind unverändert auch für den Zylinder zweiter Art gültig.

DRITTES KAPITEL

Die automorphe Kollineationsgruppe des absoluten Kegelschnittes in Beziehung zur Elementargeometrie.

§ 1. Der absolute Kegelschnitt als reell-duales Gebilde zum Zylinder zweiter Art und seine automorphe Kollineationsgruppe.

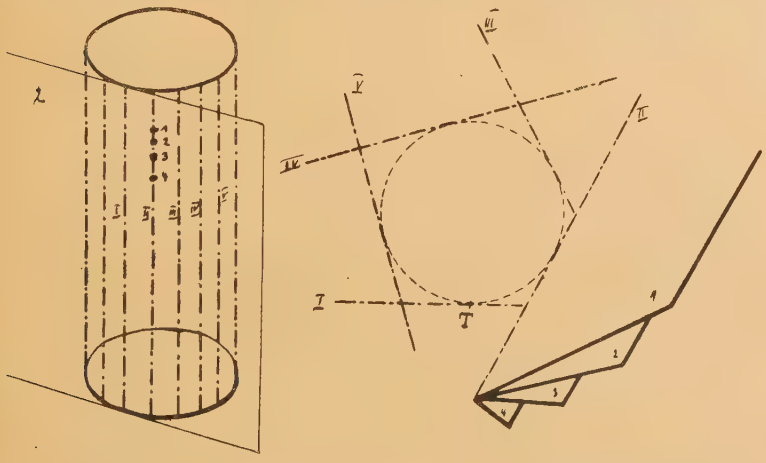
Auf Grund des Prinzips der „Dualität" oder „Reziprozität", das zuerst von *Gergonne* 1826 begründet wurde, nachdem es schon vorher *Poncelet* mittels der Polarentheorie nachgewiesen hatte, stehen sich im Raum der Punkt und die Ebene als „reziproke" Elemente gegenüber. Zu jedem Satz der projektiven Geometrie existiert seine duale Ergänzung in einem andern Satze, den man aus dem ersten ableitet, indem man die Ausdrücke Punkt und Ebene, und daher auch Punktreihe und Ebenenbüschel, Feld und Bündel miteinander vertauscht, das Wort Gerade aber unverändert läßt.

Wir wenden nun dieses Prinzip auf unsern Zylinder zweiter Art an[27]). Den ∞^2 Punkten des Zylinders entsprechen ∞^2 Ebenen des dualen Gebildes. Den ∞^1 Tangentialebenen an den Zylinder sind ∞^1 Punkte zugeordnet. Den ∞^1 Mantellinien, die Träger von Punktreihen sind und alle durch ein und denselben uneigentlichen Punkt hindurchgehen, entsprechen ∞^1 Geraden, die ihrerseits Träger von Ebenenbüscheln sind und alle in der unendlichfernen Ebene liegen. Den Mantellinien, in welchen die

[27]) Die Dualität zwischen Kegel und Kegelschnitt wohl zuerst bei v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage, S. 22. Nürnberg 1856—1860.

Tangentialebenen den Zylinder berühren, sind zugeordnet die Tangenten, die einen in der unendlichfernen Ebene liegenden Kegelschnitt umhüllen. —

Das läßt sich aus dem folgenden Bild noch deutlicher erkennen, das weiter nichts als eine schematische Figur zur Veranschaulichung des Gesagten sein soll.



Dieser Übergang vollzieht sich analytisch am einfachsten dadurch, daß wir in unsern Formeln an Stelle der Punktkoordinaten y Ebenenkoordinaten u schreiben. Wir setzen:

$$u_3 = y_0$$
$$u_2 = y_2$$
$$u_1 = y_1$$
$$u_0 = y_3$$

Um die geometrische Bedeutung dieses Ansatzes zu erkennen, beachten wir, daß die allgemeinen Formeln der Reziprozität lauten:

$$y_i = \sum_{k=0}^{3} a_{ik} u_k \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

In unserm Falle wird die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

woraus man erkennt, daß es sich wegen $a_{ik} = a_{ki}$ (i, k = 0, 1, 2, 3) tatsächlich um eine Polarität handelt und zwar in Bezug auf diejenige Fläche zweiten Grades, die man aus:

$$\sum_{i=0}^{3} f_i y_i = 0$$

für

$$\begin{aligned} f_0 &= u_0 = y_3 \\ f_1 &= u_1 = y_1 \\ f_2 &= u_2 = y_2 \\ f_3 &= u_3 = y_0 \end{aligned}$$

erhält, also Polarität an der Fläche:

$$2 y_0 y_3 + y_1^2 + y_2^2 = 0$$

oder in gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten:

$$z = -\frac{x^2 + y^2}{2}$$

Das ist ein Rotationsparaboloid, das sich in Richtung der negativen z-Axe öffnet, und den Koordinatenanfang zum Scheitel hat.

Durch den obigen Ansatz geht Gleichung (23) über in die schon aus dem Kapitel bekannte Gleichung des absoluten Kegelschnittes in Ebenenkoordinaten:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

oder metrisch geschrieben:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

Aus (26) erhalten wir als Darstellung der automorphen Kollineationsgruppe des absoluten Kegelschnittes in Ebenenkoordinaten die Gleichungen:

$$(27)\quad \begin{cases} u_0^* = c_{33} u_0 + \beta u_1 + \gamma u_2 + \alpha u_3 \\ u_1^* = (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_2^2) u_1 + 2(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) u_2 \\ \qquad\qquad + 2(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) u_3 \\ u_2^* = -2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) u_1 + (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2) u_2 \\ \qquad\qquad + 2(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) u_3 \\ u_3^* = -2(\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2) u_1 - 2(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) u_2 \\ \qquad\qquad + (\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_2^2) u_3 \end{cases}$$

§ 2. Der Übergang von Ebenenkoordinaten zu Punktkoordinaten.

Um von den im vorigen § aufgestellten Gleichungen der automorphen Kollineationsgruppe des absoluten Kegelschnittes in Ebenenkoordinaten zu Punktkoordinaten überzugehen, machen wir Gebrauch von der bereits früher (Kap. I § 3) verwendeten Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Ebene (Inzidenzbedingung):

$$(I) \qquad u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

die nichts anderes aussagt, als daß der Punkt (x_0, x_1, x_2, x_3) in der Ebene (u_0, u_1, u_2, u_3) liegt. Das entsprechende gilt auch für die transformierte Ebene $(u_0^*, u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ und den transformierten Punkt $(x_0^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*)$:

$$(II) \qquad u_0^*x_0^* + u_1^*x_1^* + u_2^*x_2^* + u_3^*x_3^* = 0$$

Dies vorausgeschickt führen wir zur bequemeren Schreibweise die folgenden Abkürzungen ein:

Wir bezeichnen mit D die Determinante des Gleichungssystemes (27), also:

$$D \equiv \begin{vmatrix} c_{33} & \beta & \gamma & \alpha \\ 0 & \alpha_1^2-\beta_1^2-\alpha_2^2+\beta_2^2 & 2(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) & 2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 \\ 0 & -2(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2) & \alpha_1^2+\beta_1^2-\alpha_2^2-\beta_2^2 & 2(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1) \\ 0 & -2(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2) & -2(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) & \alpha_1^2-\beta_1^2+\alpha_2^2-\beta_2^2 \end{vmatrix}$$

oder kürzer:

$$D \equiv \begin{vmatrix} c_{33} & \beta & \gamma & \alpha \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Außerdem sei:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Die zweireihigen Unterdeterminanten von Δ mögen in bekannter Weise mit A_{ik} (i, k = 1, 2, 3) bezeichnet werden.

Dann ergibt die Rechnung:

$$\Delta = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2)^3 = \delta^3;$$

ferner wird:

$$A_{ik} = a_{ik} \cdot \delta \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

was für die Vereinfachung der Rechnung von Bedeutung ist.

Der Übergang von Ebenenkoordinaten zu Punktkoordinaten geschieht nun in der Weise, daß wir aus den Gleichungen (27) die u_i als Funktionen der u_i^* berechnen und die gefundenen Werte in (I) eintragen; dann stellen uns die Koeffizienten der u_i^*, die nur noch die x_i enthalten, vermöge (II) die x_i^* dar.

$$u_0 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} u_0^* & \beta & \gamma & \alpha \\ u_1^* & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u_2^* & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u_3^* & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\{u_0^*\Delta - u_1^*(\beta A_{11} + \gamma A_{12} + \alpha A_{13}) + u_2^*(\beta A_{21} + \gamma A_{22} + \alpha A_{23}) - u_3^*(\beta A_{31} + \gamma A_{32} + \alpha A_{33})$$

$$u_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} c_{33} & u_0^* & \gamma & \alpha \\ 0 & u_1^* & a_{12} & a_{13} \\ 0 & u_2^* & a_{22} & a_{23} \\ 0 & u_3^* & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\{c_{33}(u_1^* A_{11} + u_2^* A_{21} + u_3^* A_{31})\}$$

$$u_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} c_{33} & \beta & u_0^* & \alpha \\ 0 & a_{11} & u_1^* & a_{13} \\ 0 & a_{21} & u_2^* & a_{23} \\ 0 & a_{31} & u_3^* & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\{c_{33}(u_1^* A_{12} + u_2^* A_{22} + u_3^* A_{32})\}$$

$$u_3 = \frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} c_{33} & \beta & \gamma & u_0^* \\ 0 & a_{11} & a_{12} & u_1^* \\ 0 & a_{21} & a_{22} & u_2^* \\ 0 & a_{31} & a_{32} & u_3^* \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\{c_{33}(u_1^* A_{13} + u_2^* A_{23} + u_3^* A_{33})\}$$

Diese Werte in (I) eingetragen und den gemeinsamen Faktor $\frac{1}{D}$ weggelassen:

$$x_0\{\Delta u_0^* - (\beta A_{11} + \gamma A_{12} + \alpha A_{13})u_1^* + (\beta A_{21} + \gamma A_{22} + \alpha A_{23})u_2^* - (\beta A_{31} + \gamma A_{32} + \alpha A_{33})u_3^*\}$$
$$+ x_1\{c_{33}A_{11}u_1^* + c_{33}A_{21}u_2^* + c_{33}A_{31}u_3^*\}$$
$$+ x_2\{c_{33}A_{12}u_1^* + c_{33}A_{22}u_2^* + c_{33}A_{32}u_3^*\}$$
$$+ x_3\{c_{33}A_{13}u_1^* + c_{33}A_{23}u_2^* - c_{33}A_{33}u_3^*\} = 0$$

Umgeordnet:

$$
\begin{aligned}
&[x_0\Delta]u_0^* \\
&+[-x_0(\beta A_{11}+\gamma A_{12}+\alpha A_{13})+c_{33}A_{11}x_1+c_{33}A_{12}x_2 \\
&\qquad\qquad +c_{33}A_{13}x_3]u_1^* \\
&+\quad [x_0(\beta A_{21}+\gamma A_{22}+\alpha A_{23})+c_{33}A_{21}x_1+c_{33}A_{22}x_2 \\
&\qquad\qquad +c_{33}A_{23}x_3]u_2^* \\
&+[-x_0(\beta A_{31}+\gamma A_{32}+\alpha A_{33})+c_{33}A_{31}x_1+c_{33}A_{32}x_2 \\
&\qquad\qquad +c_{33}A_{33}x_3]u_3^*=0
\end{aligned}
$$

Verglichen mit (II) folgt hieraus:

$$
\begin{aligned}
x_0^* &= \qquad\qquad \Delta x_0 \\
x_1^* &= (-\beta A_{11}-\gamma A_{12}-\alpha A_{13})x_0+c_{33}A_{11}x_1+c_{33}A_{12}x_2+c_{33}A_{13}x_3 \\
x_2^* &= (\beta A_{21}+\gamma A_{22}+\alpha A_{23})x_0+c_{33}A_{21}x_1+c_{33}A_{22}x_2+c_{33}A_{23}x_3 \\
x_3^* &= (-\beta A_{31}-\gamma A_{32}-\alpha A_{33})x_0+c_{33}A_{31}x_1+c_{33}A_{32}x_2+c_{33}A_{33}x_3
\end{aligned}
$$

oder wegen $A_{ik}=a_{ik}\delta$

$$
\left.
\begin{aligned}
x_0^* &= \qquad\qquad \delta^2 x_0 \\
x_1^* &= (-\beta a_{11}-\gamma a_{12}-\alpha a_{13})x_0+c_{33}a_{11}x_1+c_{33}a_{12}x_2+c_{33}a_{13}x_3 \\
x_2^* &= (\beta a_{21}+\gamma a_{22}+\alpha a_{23})x_0+c_{33}a_{21}x_1+c_{33}a_{22}x_2+c_{33}a_{23}x_3 \\
x_3^* &= (-\beta a_{31}-\gamma a_{32}-\alpha a_{33})x_0+c_{33}a_{31}x_1+c_{33}a_{32}x_2+c_{33}a_{33}x_3
\end{aligned}
\right\} (28)
$$

Um wenigstens einmal die Formeln explicite hinzuschreiben, führen wir für die a_{ik} die wirklichen Werte ein, und erhalten so die etwas unhandlichen Ausdrücke:

$$
(29)\left\{
\begin{aligned}
x_0^* &= (\alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2)^2 x_0 \\
x_1^* &= \{-\beta(\alpha_1^2-\beta_1^2-\alpha_2^2+\beta_2^2)-2\gamma(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) \\
&\quad -2\alpha(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\}x_0+c_{33}(\alpha_1^2-\beta_1^2-\alpha_2^2+\beta_2^2)x_1 \\
&\quad +2c_{33}(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)x_2+2c_{33}(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)x_3 \\
x_2^* &= \{-2\beta(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)+\gamma(\alpha_1^2+\beta_1^2-\alpha_2^2-\beta_2^2) \\
&\quad +2\alpha(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\}x_0-2c_{33}(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)x_1 \\
&\quad +c_{33}(\alpha_1^2+\beta_1^2-\alpha_2^2-\beta_2^2)x_2+2c_{33}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)x_3 \\
x_3^* &= \{2\beta(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2)+2\gamma(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \\
&\quad -\alpha(\alpha_1^2-\beta_1^2+\alpha_2^2-\beta_2^2)\}x_0-2c_{33}(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2)x_1 \\
&\quad -2c_{33}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)x_2+c_{33}(\alpha_1^2-\beta_1^2+\alpha_2^2-\beta_2^2)x_3
\end{aligned}
\right.
$$

Das sind in Punktkoordinaten *die Gleichungen der automorphen Kollineationsgruppe des absoluten Kegelschnittes.*

§ 3. Die Gruppe der Elementargeometrie.

Wie im Kap. I § 3 auseinandergesetzt wurde, handelt es sich bei der Gruppe der Elementargeometrie um diejenige projektive Gruppe, die den absoluten Kegelschnitt in sich transformiert. Nun wurde oben die automorphe Kollineationsgruppe des absoluten Kegelschnittes hergeleitet; die Formeln (29) stellen somit notwendig die Gruppe der Elementargeometrie dar. Es bereitet keine Schwierigkeiten, aus ihnen durch geeignete Spezialisierung die Ausdrücke für die invarianten Untergruppen der Gruppe der Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen zu gewinnen.

Aus den Betrachtungen über die Gruppe des Zylinders wissen wir bereits, daß drei invariante Untergruppen existieren:

I Die G_6, für welche $k = 1$ ist, und die sich durch die Schar H_6 ($k = -1$) zur gemischten Gruppe (G_6, H_6) erweitern läßt.

II Die G_4 : $a_1 = b_2 \quad a_2 = b_1 = 0$

III Die G_3, für welche $k = 1$, $a_1 = b_2$, $a_2 = b_1 = 0$ und die sich ebenfalls erweitern läßt durch die Schar von Transformationen H_3, für die $k = -1$ ist.

Wir gehen zur metrischen Darstellung über, indem wir schreiben:

$$x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0},\ z = \frac{x_3}{x_0}$$

$$x^* = \frac{x_1^*}{x_0^*},\ y^* = \frac{x_2^*}{x_0^*},\ z^* = \frac{x_3^*}{x_0^*}$$

Dann gehen die Formeln (28), wenn wir wie früher:

$$c_{33} = k\delta$$

setzen, über in:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= k\frac{a_{11}}{\delta}x + k\frac{a_{12}}{\delta}y + k\frac{a_{13}}{\delta}z + \frac{1}{\delta^2}(-\beta a_{11} - \gamma a_{12} - \alpha a_{13}) \\ y^* &= k\frac{a_{21}}{\delta}x + k\frac{a_{22}}{\delta}y + k\frac{a_{23}}{\delta}z + \frac{1}{\delta^2}(\beta a_{21} + \gamma a_{22} + \alpha a_{23}) \\ z^* &= k\frac{a_{31}}{\delta}x + k\frac{a_{32}}{\delta}y + k\frac{a_{33}}{\delta}z + \frac{1}{\delta^2}(-\beta a_{31} - \gamma a_{32} - \alpha a_{33}) \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{1i}}{\delta} = \lambda_i, \quad \dfrac{a_{2i}}{\delta} = \mu_i; \quad \dfrac{a_{3i}}{\delta} = \nu_i \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \lambda = \dfrac{1}{k\delta^2}(-\beta a_{11} - \gamma a_{12} - \alpha a_{13}) \\ \mu = \dfrac{1}{k\delta^2}(\beta a_{21} + \gamma a_{22} + \alpha a_{23}) \\ \nu = \dfrac{1}{k\delta^2}(-\beta a_{31} - \gamma a_{32} - \alpha a_{33}) \end{cases}$$

Dann wird aus den Gleichungen (30):

$$(32)\quad \begin{cases} x^* = kx^1 & x^1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda \\ y^* = ky^1 & y^1 = \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z + \mu \\ z^* = kz^1 & z^1 = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \nu \end{cases}$$

Geht man auf die ursprüngliche Bedeutung der Parameter λ_i, μ_i, ν_i zurück [Formeln (31) (28) und (29)], so findet man nach leichter Rechnung, daß die „Orthogonalitätsbedingungen" erfüllt sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 & \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0 \\ \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1 & \lambda_2\lambda_3 + \mu_2\mu_3 + \nu_2\nu_3 = 0 \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 & \lambda_3\lambda_1 + \mu_3\mu_1 + \nu_3\nu_1 = 0 \end{array}\right\} \quad (33)$$

Die Formeln (32) enthalten 13 Parameter, wovon wegen (33) 7 wesentliche sind, in Übereinstimmung damit, daß die Gruppe der Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen 7 gliedrig ist. Die drei linksstehenden Formeln von (32) stellen Streckungen vom Nullpunkt aus dar, die drei übrigen sind die Gleichungen der Bewegungen.

I. Für $k=1$ ergeben die Gleichungen (32) die Gruppe G_6:

$$\begin{aligned} x^* &= \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda \\ y^* &= \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z + \mu \\ z^* &= \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \nu \end{aligned}$$

wobei wiederum die Formeln (33) gelten. Die G_6 ist somit die Gruppe der Bewegungen, die kongruente Figuren in ebensolche überführt.

Die Schar H_6, für welche $k = -1$:

$$\begin{aligned} -x^* &= \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda \\ -y^* &= \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z + \mu \\ -z^* &= \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \nu \end{aligned}$$

liefert Spiegelungen am Punkte $(x_0\, y_0\, z_0)$, wobei

$$x_0 : y_0 : z_0 : 1 = \begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda \\ \mu_1 & 1+\mu_2 & \mu_3 & \mu \\ \nu_1 & \nu_2 & 1+\nu_3 & \nu \end{vmatrix}$$

II. Für die G_4 ist:

$$a_1 = b_2,\ a_2 = b_1 = 0,$$

woraus wegen (25) Kap. II § 6 folgt:

$$\beta_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \beta_2 = 0$$

$$\delta = \alpha_1^{\,2} \quad a_{lm} = \begin{cases} \alpha_1^{\,2} & \text{für } l = m \\ 0 & \text{für } l \neq m \end{cases}$$

Dann wird aus (30):

$$x^* = kx - \frac{\beta}{\alpha_1^{\,2}}$$

$$y^* = ky + \frac{\gamma}{\alpha_1^{\,2}}$$

$$z^* = kz - \frac{\alpha}{\alpha_1^{\,2}}$$

oder auch für:

$$a = -\frac{\beta}{k\alpha_1^{\,2}}, \quad b = \frac{\gamma}{k\alpha_1^{\,2}}, \quad c = -\frac{\alpha}{k\alpha_1^{\,2}}$$

$$(34) \quad \begin{cases} x^* = kx^1 & x^1 = x + a \\ y^* = ky^1 & y^1 = y + b \\ z^* = kz^1 & z^1 = z + c \end{cases}$$

Das sind wiederum Streckungen vom Nullpunkt aus mit nachfolgender Parallelverschiebung.

III. G_3: $k = 1$, $a_1 = b_2$, $a_2 = b_1 = 0$

$$\begin{aligned} x^* &= x + a \\ y^* &= y + b \\ z^* &= z + c \end{aligned}$$

Das sind Translationen.

Für die Schar H_3, $(k = -1)$ folgt

$$\begin{aligned} x^* &= -x + a \\ y^* &= -y + b \\ z^* &= -z + c \end{aligned}$$

Das sind wiederum Spiegelungen und zwar am Punkt:

$$x_0 = \frac{a}{2},\ y_0 = \frac{b}{2},\ z_0 = \frac{c}{2}.$$

VITA

Ich, *Max Rudolf Hartmann* von Basel, wurde am 5. Juni 1895 in Basel geboren als Sohn des Joh. Friedr. Hartmann, Zettlermeister, und seiner Gattin Mina geb. Widmer. Ich absolvierte die Primar- und Realschule von Basel und bestand im Herbst 1914 an der obern Realschule die Maturitätsprüfung. Wenige Wochen nach meiner Immatrikulation an der hiesigen Universität wurde ich für ein Jahr zum Militärdienst einberufen, der auch die folgenden drei Jahre meiner Studienzeit reichlich durchsetzte. Im Februar 1918 bestand ich in den Fächern Mathematik, Physik, Chemie und Pädagogik das Mittellehrerexamen und unterrichtete seit dieser Zeit mit wenig Unterbrechungen als Vikar an den Basler Mittelschulen, zuletzt ausschließlich an der obern Realschule. Im Frühjahr 1921 legte ich in den bereits genannten Fächern die Oberlehrerprüfung ab und studierte während des nachfolgenden Sommersemesters in Paris. Nach einer längeren Reise durch Südfrankreich und Italien begann ich im Herbst 1921 auf Anregung und unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. *H. Mohrmann* die vorliegende Arbeit, welche ich im Februar 1923 abschloß.

Ich besuchte die Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Dozenten:

In Basel: *H. Mohrmann, O. Spieß, A. Hagenbach, F. Fichter, H. Rupe, A. L. Bernoulli, E. Hecke, O. Braun, H. Matthies, T. Niethammer, H. Veillon, H. Zickendraht, R. Flatt und M. Knapp.*

In Paris: *E. Goursat, H. Lebesgue* und *E. Picard.*

Es ist mir eine angenehme Pflicht, allen diesen Herren für ihre Bemühungen meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Insbesondere gebührt mein wärmster Dank Herrn Prof. Dr. *H. Mohrmann* für die vielen Ratschläge und für das stets fördernde Interesse an meiner Arbeit.